

# IDAG: Ortogonalitet

- Mål:
- Generalisera avstånd och vinklar till  $\mathbb{R}^n$
  - Beskriva projektioner

Låt  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Vi har redan definierat

skalärprodukten  $u \cdot v = \sum_{j=1}^n u_j v_j$

↑↑ komponenterna av  $u$  och  $v$

Genom att se  $u$  och  $v$  som  $n \times 1$ -matriser

får vi

$$[u \cdot v] = u^T v = [u_1 \dots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Hädanefter kommer vi se  $1 \times 1$ -matrisen  $[u \cdot v]$

som talet  $u \cdot v$  och bara skriva  $u \cdot v = u^T v$ .

Det följer direkt att

$$[u \cdot v] = u^T v = (v^T u)^T \stackrel{1 \times 1\text{-matris}}{=} v^T u = [v \cdot u] \quad \text{och}$$

$$[(au + bv) \cdot w] = (au + bv)^T w = (au^T + bv^T) w = [au \cdot w + bv \cdot w]$$

för alla  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Vi får även att  $u \cdot u \geq 0$  och  $u \cdot u = 0 \Rightarrow u = 0$ .

Vi kan därför säga

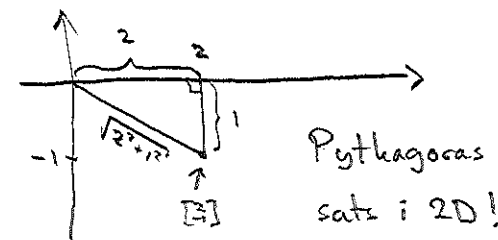
Def. Normen av  $u \in \mathbb{R}^n$  ges av talet

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_{j=1}^n u_j^2}$$

Detta är "längden" av en vektor:

Ex.

$$\| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$



Def. En enhetsvektor är en vektor  $u \in \mathbb{R}^n$  med  $\|u\|=1$ .

Ex. Alla  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  är enhetsvektorer.

Ex. Givet  $v \in \mathbb{R}^n$  är  $\frac{v}{\|v\|}$  en enhetsvektor, då

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\|^2 = \frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|^2} v \cdot v = \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \|v\|^2 = 1.$$

Detta kallas att normalisera en vektor: det ändrar bara storleken på  $v$  men inte riktningen.

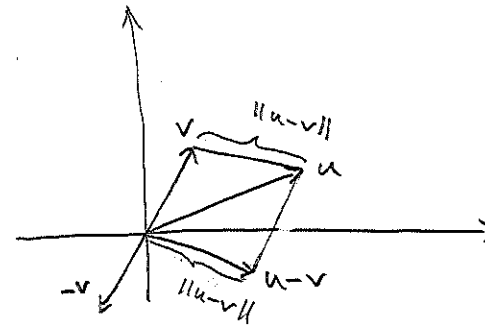
Kan vi mäta "längder" kan vi mäta avstånd:

Def. Avståndet mellan  $u$  och  $v$  i  $\mathbb{R}^n$  ges av

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\| \quad (\text{p.g.a. engelska "distance"})$$

(Här ser vi mer naturligt  $u$  och  $v$  som punkter snarare än sträckor.)

Ex.



Def. Vi säger att  $u$  och  $v$  är ortogonala om  $u \cdot v = 0$ .

Detta betyder "rätvinkliga" i 2D och 3D, och vi får

Sats 6.1.2 (Pythagoras sats i  $\mathbb{R}^n$ .)

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \text{om } u \text{ och } v \text{ är ortogonala.}$$

$$\begin{aligned} \text{Bewis: } \|u+v\|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot u + u \cdot v + \overbrace{v \cdot u}^{=u \cdot v} + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v \end{aligned}$$

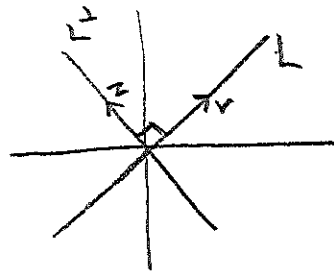
och  $2u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u, v$  är ortogonala.  $\square$

Def. Låt  $W$  vara ett underrum av  $\mathbb{R}^n$ . Då är  $z \in \mathbb{R}^n$  ortogonal till  $W$  om  $z \cdot v = 0$  för alla  $v \in W$ . Det ortogonala komplementet till  $W$  ges av

$$W^\perp = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z \cdot v = 0 \forall v \in W\}.$$

Ex. I 2D är  $u \cdot v = 0$  om  $u$  och  $v$  är vinkelräta (Pythagoras). Så om  $L$  är en linje blir

$L^\perp$  en vinkelrät linje:



Sats

I Låt  $W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_p\} \subset \mathbb{R}^n$ . Då gäller att  $x \in W^\perp \Leftrightarrow x \cdot v_k = 0, k=1, \dots, p$ .

II  $W^\perp$  är ett underrum av  $\mathbb{R}^n$ .

Bevis: I ( $\Leftarrow$ ) Om  $x \cdot v_k = 0$  för alla  $k$  så är

$$x \cdot (c_1 v_1 + \dots + c_p v_p) = 0$$

( $\Rightarrow$ ) Om  $x \cdot (c_1 v_1 + \dots + c_p v_p) = 0$  för alla  $c_1, \dots, c_p$

kan vi t.ex. ta  $c_1 = 1, c_2 = 0, \dots, c_p = 0$  och få  $x \cdot v_1 = 0$ .

II Verifiera de tre kraven:  $0 \in W^\perp$  då  $0 \cdot v = 0 \forall v$ .

$u \cdot v = 0$  och  $w \cdot v = 0 \Rightarrow (u+w) \cdot v = 0$  så  $u+w \in W^\perp$

$u \cdot v = 0, c \in \mathbb{R} \Rightarrow (cu) \cdot v = c(u \cdot v) = 0$  så  $cu \in W^\perp$ .  $\square$

### Speciella underrum

Sats 6.1.3 Låt  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Då är

$$(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A \quad \text{och} \quad (\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A^T.$$

Bevis: Antag att  $A$ 's rader är  $r_1, r_2, \dots, r_m$ ,

dvs.  $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$  där  $r_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .  $\rightarrow$

Beris forts.

$$x \in \text{Nul } A \Rightarrow Ax = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \cdot x \\ r_2 \cdot x \\ \vdots \\ r_m \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

så  $r_k \cdot x = 0$ ,  $k=1, \dots, m$ .

Men  $\text{Span}\{r_1, \dots, r_m\} = \text{Row } A$  så  $x \in (\text{Row } A)^\perp$ .

Har vi istället  $x \in (\text{Row } A)^\perp$  så är  $x \cdot r_k = 0 \forall k$

$$\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \text{Nul}(A)$$

Alltså är  $(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul}(A)$ .

Då  $\text{Col } A = \text{Row } A^T$  får vi direkt  $(\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A^T$ .  $\square$

Def.  $S = \{u_1, \dots, u_p\} \subset \mathbb{R}^n$  är en ortogonal mängd om  $u_i \cdot u_j = 0$  då  $i \neq j$ .

Dvs. alla par av (olika) vektorer är ortogonala.

Ex.  $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$  är ortogonal, då

$$e_1 \cdot e_2 = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad e_1 \cdot e_3 = 0, \quad e_2 \cdot e_3 = 0.$$

Ortogonalitet är alltid bra! T.ex.:

Sats 6.2.4 En ortogonal mängd  $S$  där  $0 \notin S$

är linjärt oberoende, och därmed en bas för

$\text{Span}\{S\}$ .

Beris: Låt  $S = \{u_1, \dots, u_p\}$ . Då ger

$$\vec{0} = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p \quad \text{att} \quad 0 = \vec{0} \cdot u_1 = (c_1 u_1 + \dots + c_p u_p) \cdot u_1$$

$$\xrightarrow{\text{S ortogonal}} = c_1 u_1 \cdot u_1 = c_1 \|u_1\|^2$$

Men  $\|u_1\| \neq 0$  då  $u_1 \neq \vec{0}$ , så  $c_1 = 0$ .

På samma sätt får vi  $c_k = 0$ ,  $k=1, \dots, p$ .  $\square$

Sats 6.2.5 Låt  $\{u_1, \dots, u_p\}$  vara en ortogonal bas för  $W \subset \mathbb{R}^n$  (dvs. ortogonal mängd och bas). För  $x = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p$  gäller då att  $c_j = \frac{x \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}$

Dvs. vi behöver inte lösa ett L.E.S. för att bestämma koordinaterna!

Bewis:  $x \cdot u_1 = (c_1 u_1 + \dots + c_p u_p) \cdot u_1 = c_1 u_1 \cdot u_1$   
bas ortogonal  
 $\Rightarrow c_1 = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}$  då  $u_1 \cdot u_1 = \|u_1\|^2 \neq 0$ .

Samma procedur för  $c_j, j=1, \dots, p$ .  $\square$

Ex.  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  är en ortogonal bas för  $\mathbb{R}^2$   
 (då  $b_1 \cdot b_2 = 0$ )

Med  $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$  får vi  $u \cdot b_1 = 13, b_1 \cdot b_1 = 5$   
 $u \cdot b_2 = 11, b_2 \cdot b_2 = 5$

så  $u = \frac{13}{5} b_1 + \frac{11}{5} b_2$ .

Ortonormalitet är ännu bättre!

Def. En mängd/bas  $S = \{u_1, \dots, u_p\}$  är ortonormal om  $u_i \cdot u_j = 0$  då  $i \neq j$  och  $u_i \cdot u_i = 1$  (dvs.  $\|u_i\| = 1$ ).

I detta fall blir koefficienterna i Sats 6.2.5  $c_j = x \cdot u_j$

Ex. Standardbasen  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  är en ortonormal bas.

Ex. Om  $\{u_1, \dots, u_p\}$  är ortogonal så är

$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_p}{\|u_p\|} \right\}$  ortonormal.

[I FIS ska vi konstruera ortonormala baser med hjälp av detta.]

## Ortogonala projektioner

Låt  $W \subset \mathbb{R}^n$  vara ett underrum i det följande.

Då är  $W^\perp$  "rätvinkligt" till  $W$ :

Sats 6.3.8 Låt  $x \in \mathbb{R}^n$ . Då finns entydigt bestämda  $y \in W$  och  $z \in W^\perp$  så att  $x = y + z$ .

Om  $\{u_1, \dots, u_p\}$  är en ortogonal bas för  $W$

så har vi

$$y = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{x \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$$

och vi kallar  $y$  den ortogonala projektionen av  $x$  på  $W$ ,

skrivs  $y = \text{proj}_W x$ .

Bewis: Antag att vi har en sådan bas (visas i F15).

Via def. av  $y$  får vi  $y \in W$  och  $z = x - y \in W^\perp$ ,

$$\begin{aligned} \dagger y \quad z \cdot u_j &= (x - y) \cdot u_j \stackrel{\text{ortogonal bas, } u_i \cdot u_j = 0}{=} \left(x - \frac{x \cdot u_j}{u_j \cdot u_j} u_j\right) \cdot u_j = \\ &= x \cdot u_j - x \cdot u_j \frac{u_j \cdot u_j}{u_j \cdot u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

$y$  och  $z$  är unika: Om det fanns  $\hat{y} \in W$  och  $\hat{z} \in W^\perp$  så att  $x = \hat{y} + \hat{z}$  så har vi  $y + z = \hat{y} + \hat{z}$ , dvs.

$$\underbrace{y - \hat{y}}_{\in W} = \underbrace{\hat{z} - z}_{\in W^\perp}$$

vektorn  $\vec{0}$  gemensam, så  $y = \hat{y}$  och  $z = \hat{z}$ .

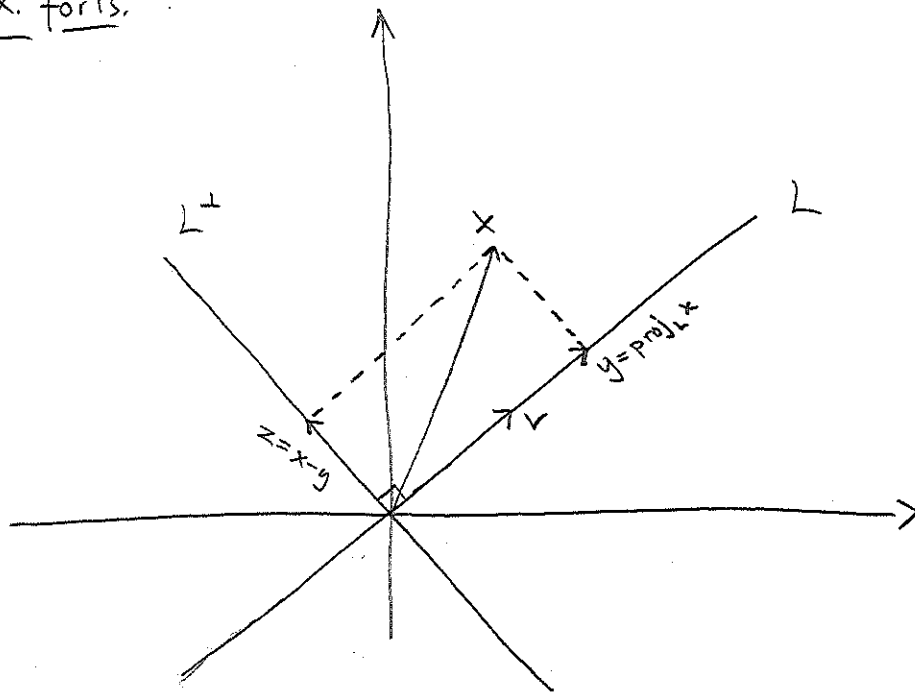
$$\left( \text{Alt. : } \underbrace{(y - \hat{y})}_{\in W} \cdot \underbrace{(y - \hat{y})}_{\in W^\perp} = 0 \Rightarrow \|y - \hat{y}\| = 0 \Rightarrow y = \hat{y} \right) \quad \square$$

Ex.

Om  $L = \{cv \mid c \in \mathbb{R}\}$  är en linje så är

$$\text{proj}_L x = \frac{x \cdot v}{v \cdot v} v$$

Ex. forts.



$$y = \text{proj}_L x = cv \text{ för något } c \in \mathbb{R}$$

Om  $z = x - y \in L^\perp$  har vi

$$0 = (x - y) \cdot v = x \cdot v - cv \cdot v \Rightarrow c = \frac{x \cdot v}{v \cdot v}$$

Notera att om  $W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$  och vi definierar  $W_k = \text{Span}\{v_k\}$  så är

$$\text{proj}_W x = \text{proj}_{W_1} x + \text{proj}_{W_2} x + \dots + \text{proj}_{W_p} x$$

Ex.  $\mathbb{R}^3$ :

$$W = \text{Span}\{v_1, v_2\}$$

