IDAG: Egenskaper hos symmetriska matriser

Mål:
- Visa att $A = A^T \Rightarrow$ många bra saker
- Se Spektralsatsen

Def. En matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är <u>symmetrisk</u> om $A^T = A$.

I 3×3-fallet har vi alltså formen

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

: samma rader som kolonner

Symmetriska matriser har många oväntade egenskaper!

En allmän matris har n <u>komplexa</u> egenvärden, men

Sats Om $\overset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{A}$ är symmetrisk så är alla egenvärden till A reella.

Bevis: Antag $Ax = \lambda x$ där $x = y + iz$ med $y, z \in \mathbb{R}^n$ och $\lambda \in \mathbb{C}$. Beteckna komplex-konjugatet med $\bar{x} = y - iz$. Då är

$$\overline{(x^T)}\, Ax = \overline{x^T}\, \lambda x = \lambda\, \overline{x^T} x \text{ , men också}$$

$$\overline{x^T}\, A x \underset{A = \bar{A}}{=} \overline{x^T A}\, x = \overline{(A^T x)^T}\, x \underset{A^T = A}{=} \overline{(Ax)^T}\, x$$

$$\underset{Ax = \lambda x}{=} \overline{(x^T \lambda)}\, x = \bar{\lambda}\, \overline{x^T} x$$

så eftersom $\overline{x^T} x \neq 0$ $(x \neq 0)$ får vi $\bar{\lambda} = \lambda$ dvs. $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$

Sats 7.1.1 Om A är symmetrisk så är två egenvektorer associerade med olika egenvärden ortogonala.

OBS: Distinkta egenvärden $\overset{(5.1.5)}{\Rightarrow}$ lin. ober. egenvektorer

och: Ortogonala vektorer $\overset{(6.2.1)}{\Rightarrow}$ lin. ober. vektorer

men här: Distinkta egenvärden $\Rightarrow$ ortogonala egenvektorer

Bevis: Antag att $A^T = A$, $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ och $\lambda_1 \neq \lambda_2$. v_1, v_2 ortogonala $\Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$.

Men vi har
$$\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = (\lambda_1 v_1) \cdot v_2 = (\lambda_1 v_1)^T v_2 = (Av_1)^T v_2$$
$$= v_1^T A^T v_2 = v_1^T A v_2 = v_1^T \lambda_2 v_2$$
$$= \lambda_2 v_1 \cdot v_2,$$

så $(\lambda_1 - \lambda_2) v_1 \cdot v_2 = 0$ och $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$. □

Om A är symmetrisk och diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$ så har alltså $P = [v_1 \cdots v_n]$ ortogonala kolonner v_k.

Eftersom
$$P^T P = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_2 & \cdots & v_1^T v_n \\ v_2^T v_1 & v_2^T v_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ v_n^T v_1 & \cdots & & v_n^T v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 & & & \\ & \|v_2\|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|v_n\|^2 \end{bmatrix}$$

så är
$$P^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \|v_1\|^{-2} & & & \\ & \|v_2\|^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|v_n\|^{-2} \end{bmatrix}}_{S} P^T = SP^T$$

och vi har
$$A = PDSP^T = P\tilde{D}P^T$$
med en annan diagonalmatris $\tilde{D}$.

Skala nu om kolonnerna i P:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \cdots & \frac{v_n}{\|v_n\|} \end{bmatrix} = PT \quad \text{där } T = \begin{bmatrix} \|v_1\|^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \|v_n\|^{-1} \end{bmatrix}$$

med $T^2 = S$.

$\tilde{P}$ är ortogonal då $\tilde{P}^T\tilde{P} = I_n$ och vi får

$$\tilde{P} D \tilde{P}^T = PT\,D(PT)^T = PTDTP^T \qquad (T^T = T)$$

Men $TDT = DT^2 = \underbrace{DS}_{=\tilde{D}}$ då D, T, S är diagonala,

så $\boxed{A = \tilde{P} D \tilde{P}^T}$

Detta är en ortogonal diagonalisering av A.

Istället för bara lin. ober. egenvektorer har vi ortonormala egenvektorer och vi får ett transponat istället för invers i formeln för A.

Om $A = PDP^T$ så är $A^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$.

Detta visar hälften av

Sats 7.1.2 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är ortogonalt diagonaliserbar omm A är symmetrisk.

Dvs. alla A med $A^T = A$ är diagonaliserbara, och även ortogonalt diag.!

(Utan bevis, men det är inte alls så svårt som antyds i Lay.)

Ex. (och repetition av diagonalisering)

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $A = A^T \Rightarrow$ diagonaliserbar.

(I) Egenvärdena till A ges av

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4-\lambda \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 9\right)$$

så $\lambda = 4$ eller $\lambda = 1 \pm 3$

dvs. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$

(med algebraisk multiplicitet 2)

(II) Egenrum: $\lambda_1 = -2$ ger $(A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ 6x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så $\mathcal{B}_1 = \{v_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$ är en ortonormal bas för E_1

$\lambda_2 = 4$ ger att $(A - \lambda_2 I)x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 3x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så $\mathcal{B}_2 = \{v_2, v_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$ är en ortonormal

bas för E_2. (Då $v_2 \cdot v_3 = 0$.)

Om vi inte haft $v_2 \cdot v_3 = 0$ hade vi använt Gram-Schmidt för att få en ortonormal bas.

Notera att Sats 7.1.1 håller: $v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = 0$!

III Sätt $P = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Notera att $P^T = P$ så $PP^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

och P är verkligen ortogonal: $P^{-1} = P^T = P$.

IV Sätt $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

V Kontrollera att

$$AP = PD$$

$$AP = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} & 0 & 4/\sqrt{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ -2/\sqrt{2} & 0 & 4/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad PD = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} & 0 & 4/\sqrt{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ -2/\sqrt{2} & 0 & 4/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

OK!

$\therefore\ A = PDP^T = PDP$ är en ortogonal diagonalisering av A.

$\longrightarrow$

Notera att om vi har $P = [v_1 \cdots v_n]$

och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ så blir

$$A = PDP^T = \underbrace{[\lambda_1 v_1 \cdots \lambda_n v_n]}_{PD} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}}_{P^T}$$

$$= \lambda_1 v_1 v_1^T + \cdots + \lambda_n v_n v_n^T .$$

Detta kallas för en spektraldekomposition av A, då mängden av alla egenvärden kallas A:s spektrum.

Varje $v_j v_j^T$ är en projektion på v_j med en vikt som ges av λ_j.

Slutligen har vi:

Spektralsatsen (7.1.3)

Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara symmetrisk. Då gäller följande:

(I) A har n reella egenvärden (räknat med multiplicitet)

(II) Den algebraiska multipliciteten för ett egenvärde är lika med dess geometriska multiplicitet.

(III) Egenrummen är ortogonala; egenvektorer associerade med olika egenvärden är ortogonala.

(IV) A är ortogonalt diagonaliserbar.

(Också utan bevis.)

Tony Stillfjord tony.stillfjord@chalmers.se