IDAG: Kvadratiska former

Mål:
* Analysera vissa ickelinjära funktioner med linjär algebra
* Minimera/maximera dessa

Funktioner av typen $f(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$

är viktiga inom t.ex. optimering, statistik, reglerteknik m.m. Ofta skall dessa minimeras eller maximeras.

Notera att f inte är linjär!

Ex. Hitta minimum och maximum av

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2 .$$

Kvadratkomplettera: $(x_1 + \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + \frac{16}{4}x_2^2 + x_3^2$

$$= (x_1 + \tfrac{3}{2}x_2)^2 + \tfrac{11}{4}x_2^2 + x_3^2$$

så $f \geq 0$ och $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ger $f = 0$ dvs. $\min f = 0$.

Vi har också $\max f = +\infty$ då alla termerna är positiva.

Ex. Om vi antar bivillkoret $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

är situationen en annan. Då är $\min f \approx 0.38$ och $\max f \approx 4.62$

Hur ser vi det?

Vi börjar med att skriva f på matrisform:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x^T A x \quad \text{där } x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kontroll: $x^TAx = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} x_1 + 3/2\, x_2 \\ 3/2\, x_1 + 4x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + \overbrace{\tfrac{3}{2}x_1x_2 + \tfrac{3}{2}x_2x_1}^{=3x_1x_2} + 4x_2^2 + x_3^2$.

Vi delar upp $3x_1x_2$ i två delar för att få en symmetrisk matris. Detta förenklar situationen, men även t.ex. $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ hade gett samma f.

För ett allmänt $f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$ med

$$\begin{aligned} f(x) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

får vi

$$f(x) = x^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & & & a_{nn} \end{bmatrix} x .$$

Def. En kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$ är en funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som ges av $Q(x) = x^TAx$, där $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk.

Ex. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ger den kvadratiska formen

$$-3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 .$$

Den kvadratiska formen $7x_1^2 + 1x_1x_2 - 3x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3$ ges av matrisen

$$\begin{bmatrix} 7 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 2 & 2 \\ -3/2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tidigare kvadratkompletterade vi och fick

$(x_1+\frac{3}{2}x_2)^2 + \frac{11}{4}x_2^2 + x_3^2$.

Med $y_1 = x_1 + \frac{3}{2}x_2$, $y_2 = x_2$ och $y_3 = x_3$ får vi

en ny kvadratisk form $y^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = y_1^2 + \frac{11}{4}y_2^2 + y_3^2$

<u>utan korstermer</u> $y_i y_j$, $i \neq j$.

Detta underlättar, och vi kan alltid göra ett sådant variabelbyte:

<u>Sats 7.2.4</u> (Satsen om principalaxlar)

Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara symmetrisk. Då finns en ortogonal matris P så att variabelbytet $x = Py$ (dvs. $y = P^T x$) ger en ny kvadratisk form $y^T D y = x^T A x$ där D är diagonal.

<u>Bevis:</u> A är ortogonalt diagonaliserbar, så $A = PDP^T$ med P ortogonal och D diagonal.

Sätt $y = P^T x$ så blir

$$y^T D y = (P^T x)^T D P^T x = x^T P D P^T x = x^T A x. \quad \square$$

<u>Ex.</u> Notera att i exemplet innan tog vi

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x,$$

och denna matris är <u>inte</u> ortogonal. Det finns alltså olika variabelbyten, men det ortogonala leder till bäst egenskaper:

<u>Sats 7.3.6</u> Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara symmetrisk med $A = PDP^T$ där $P = [v_1 \cdots v_n]$ är ortogonal och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ med $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

Då är $\max_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_1 = v_1^T A v_1$ och $\min_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_n = v_n^T A v_n$.

OBS: Detta löser vårt tidigare problem då

$$\|x\| = 1 \iff x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

<u>Bevis:</u> Med $x = Py$ har vi $x^T A x = y^T D y$.

Då P är ortogonal är $\|x\| = \|Px\| = \|y\|$, $\left(\begin{matrix}(Px)\cdot(Px) \\ = x^T P^T P x = x \cdot x\end{matrix}\right)$

så $\max\limits_{\|x\|=1} x^T A x = \max\limits_{\|y\|=1} y^T D y$.

Men $\lambda_j y_j^2 \leq \lambda_1 y_j^2$ för alla j, så

$$y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_1 \underbrace{(y_1^2 + \dots + y_n^2)}_{= \|y\|^2 = 1} = \lambda_1$$

Dvs. $\max\limits_{\|x\|=1} x^T A x \leq \lambda_1$.

Eftersom $v_1^T A v_1 = v_1^T \lambda_1 v_1 = \lambda_1 \|v_1\|^2 = \lambda_1$ så får vi

$$\max_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_1.$$

Samma resonemang för minimum, fast med λ_n, v_n. $\square$

Vi kan även hantera andra bivillkor:

<u>Ex.</u> Maximera $q(a,b) = ab$ givet att $5a^2 + 4b^2 = 20$.

Bivillkoret $\iff \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{5} = 1$, så sätt

$x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{b}{\sqrt{5}}$. Då är $x_1^2 + x_2^2 = 1$, och

vi ska maximera $Q(x_1, x_2) = 2x_1\sqrt{5}x_2 = x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}}_{A} x$.

A har egenvärdena $\lambda_1 = -\sqrt{5}$, $\lambda_2 = +\sqrt{5}$ med (ortonormala)

egenvektorer $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow \max Q(x_1, x_2) = \sqrt{5}$, för $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Detta ger $a = 2x_1 = \sqrt{2}$ och $b = \sqrt{5}x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Då är $5a^2 + 4b^2 = 10 + 10 = 20$ och $q(a,b) = ab = \sqrt{5}$.

Geometrisk tolkning

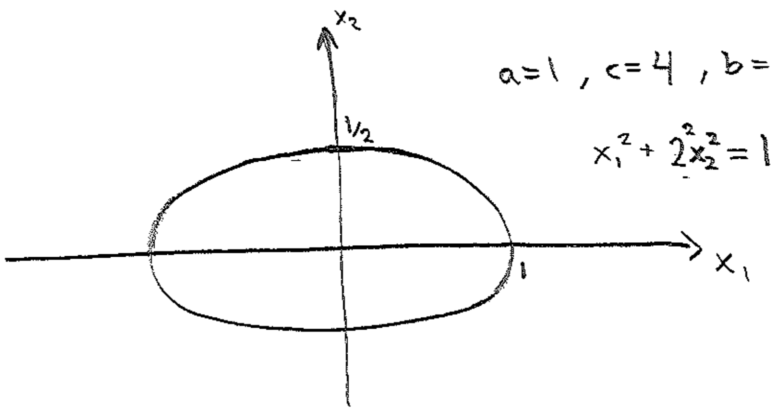
Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Då är alla punkter $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

som uppfyller $d = x^T A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$

en kurva i x_1, x_2-planet.

För $d > 0$ får vi två fall beroende på det A:

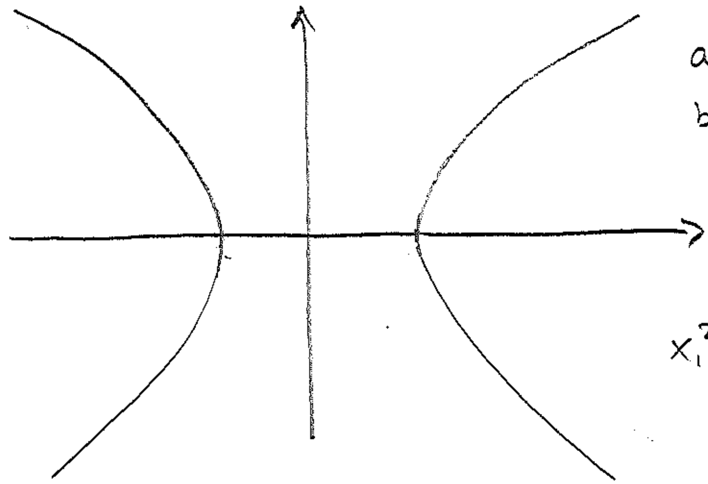
$\det A > 0 \iff ac > b^2$ ger en ellips



$a = 1$, $c = 4$, $b = 0$

$x_1^2 + 2^2 x_2^2 = 1$

$\det A < 0 \iff ac < b^2$ ger en hyperbel



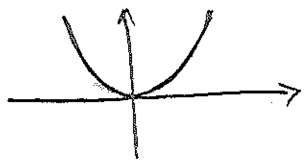
$a = 1$, $c = -1$

$b = 0$

$x_1^2 - x_2^2 = 1$

För $\det A = 0$ och "dåliga" val av d, t.ex. $d = 0$, så urartar dessa och blir linjer, en punkt eller inga punkter alls.

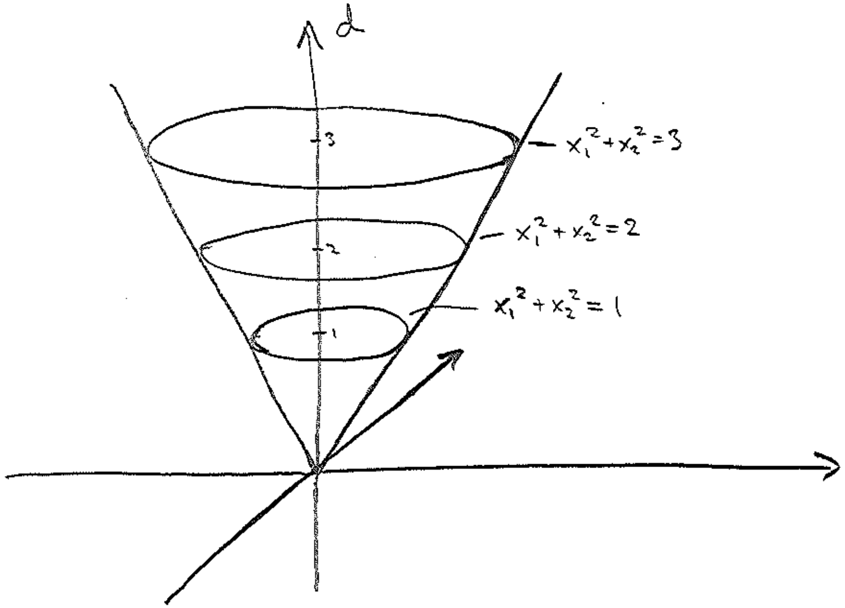
Om vi istället tar $d = x^T A x + ex + fy$ kan vi även få parabler då $\det A = 0$, t.ex. $x_2 = x_1^2$:



Dessa kurvor kallas kägelsnitt då de är skärningarna mellan en kon och ett plan i 3D.

Se Lay för en koppling mellan variabelbyten och orientationen på kurvorna.

Om vi nu istället för ett fixt d låter d variera så får vi en yta i 3D. T.ex.



Vi kan klassificera olika kvadratiska former Q beroende på vilka värden Q antar

(På föregående sida är $Q(x) \geq 0$ med $Q(x)=0$ bara då $x=0$.)

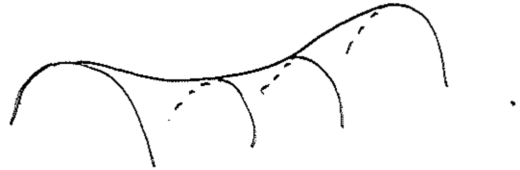
Def. En kvadratisk form är

- Positivt definit om $Q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- Negativt definit om $Q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$
- Indefinit om $\exists x, y$ så att $Q(x) < 0 < Q(y)$.

Även: pos. semidef. om $Q(x) \geq 0 \quad \forall x$,
neg. semidef. om $Q(x) \leq 0 \quad \forall x$.

Pos. def. ger en konvex mängd (som konen till vänster) och neg. def. är en konkav mängd (pos. def. uppochner).

Indefinit är en sadel:



Via satsen om principalaxlar har vi en koppling till egenvärden:

Sats 7.2.3 Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara symmetrisk med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Då är $x^T A x$

- pos. def. omm $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$,
- neg. def. omm $\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$, och
- indefinit omm $\lambda_i > 0$ och $\lambda_j < 0$ för några i, j.

Bevis: $x^T A x = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0$, $y \neq 0$,

endast om $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Samma idé för de övriga fallen.

Ex. För vilka C kan $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2Cx_1x_3$ bli negativ?

Matrisform: $x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & C \\ 0 & 2 & 0 \\ C & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} x$

Karakteristisk ekvation:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)\left((1-\lambda)(3-\lambda) - C^2 \right)$$
$$= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - C^2 \right)$$
$$= (2-\lambda)\left((\lambda-2)^2 - 1 - C^2 \right)$$

Så $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{1+C^2}$, $\lambda_3 = 2 + \sqrt{1+C^2}$

$\Rightarrow$ pos. semidef. omm $\sqrt{1+C^2} \leq 2 \iff C^2 \leq 3$

Dvs. uttrycket kan bli negativt ifall $|C| > \sqrt{3}$.

(Notera: även positiva C!)