IDAG: Matriser och vektorer

Mål: * Förstå kopplingen

L.E.S. $\Leftrightarrow$ vektorekvation $\Leftrightarrow$ matrisekvation

* Använda (förstå) begreppen linjärkombination, linjärt hölje

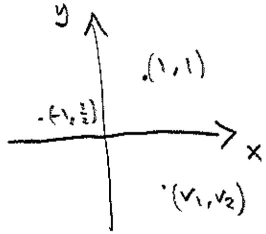
* Använda (bevisa) Sats 1.4.4

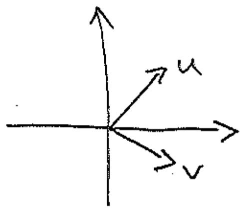
Se veckoPM!

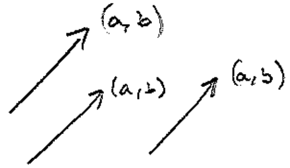
Vektorer

Def. En <u>vektor i $\mathbb{R}^n$</u> är en ordnad (!) lista med n tal. Vi skriver $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = (v_1, \dots, v_n)$.

Ex. För $n=2$ får vi planet $\mathbb{R}^2$. Alla vektorer $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ kan visualiseras som 2D-punkter eller riktade sträckor.







Def. Låt $u = (u_1, \dots, u_n)$ och $v = (v_1, \dots, v_n)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Då är $u = v$ om $u_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Vidare definierar vi

$$u + v = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad cu = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix} \quad \text{för alla } c \in \mathbb{R}.$$

Dvs. <u>elementvis</u> addition och multiplikation med skalär.

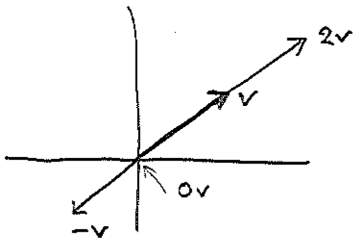
Ex. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3\cdot 4 \\ 2-3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -13 \end{bmatrix}$

Geometrisk tolkning

Ex. Låt $v \in \mathbb{R}^2$. Då beskriver $\{cv \mid c \in \mathbb{R}\}$ en linje i 2D

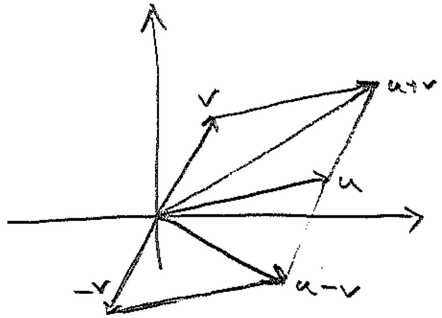
forts. →

Ex. forts.



Likadant i 3D ($\mathbb{R}^3$).

Ex. $u, v \in \mathbb{R}^2$



Att addition är elementvis betyder att vektorer i $\mathbb{R}^n$ "beter sig som tal i $\mathbb{R}$". T.ex. har vi

$$u+v = v+u \quad \text{och} \quad (u+v)+w = u+(v+w)$$

dvs. det vi förväntar oss från våra 2D-exempel.

Se Lay p. 43 för lista med egenskaper!

OBS: Vi har t.ex. inte definierat u/v eller uv för vektorer. (Går att göra men invecklat. Inte elementvis.)

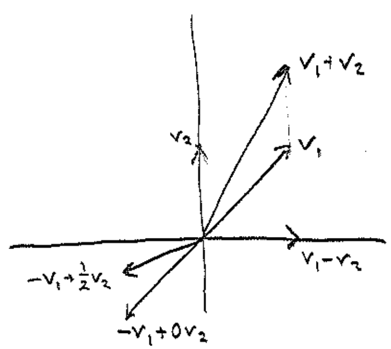
Def. Givet vektorer $v_1, v_2, \dots, v_p$ i $\mathbb{R}^n$ och $c_1, \dots, c_p$ i $\mathbb{R}$ så kallas vektorn

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = \sum_{k=1}^{p} c_k v_k$$

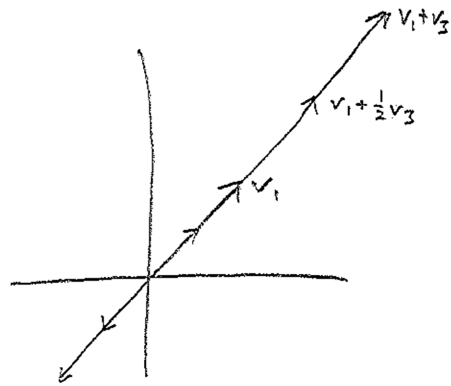
en linjärkombination av $v_1, \dots, v_p$ med vikterna $c_1, \dots, c_p$.

Obs: Alla $v_k \in \mathbb{R}^n$ här, dvs. de är inte komponenter av en vektor v. Man kan skriva $\vec{v_k}$ för att vara tydlig, men det borde alltid framgå från sammanhanget.

Ex. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\quad v_3 = 2v_1$



Kan nå alla punkter i planet via v_1, v_2.



Kan bara nå linjen cv_1 via v_1, v_3.

<u>Fråga</u>: Givet $v_1, \dots, v_p$ och b i $\mathbb{R}^n$, kan b skrivas som en lin. komb. av $v_1, \dots, v_p$?

Ex. (Lay ex. 5) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Om b är en lin. komb. av v_1, v_2 så har vi

$c_1 v_1 + c_2 v_2 = b$ för några $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dvs.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} 1c_1 + 2c_2 = 7 \\ -2c_1 + 5c_2 = 4 \\ -5c_1 + 6c_2 = -3 \end{cases}.$$

Men detta är ett L.E.S. för c_1, c_2! Totalmatris:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} +2 \\ +5 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \begin{matrix} \to * \tfrac{1}{9} \\ -\tfrac{16}{9} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dvs. $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ och b är en lin. komb. av v_1, v_2: $b = 3v_1 + 2v_2$.

<u>Generalisering</u>

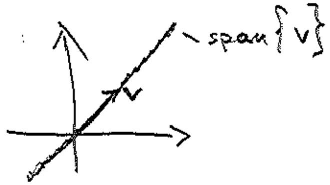
Vektorekvationen $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = b$ har samma lösningsmängd som ett L.E.S. med totalmatris

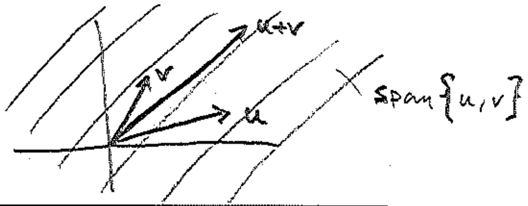
$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p & b \end{bmatrix} \leftarrow n \times (p+1)\text{-matris med kolonnerna } v_1, \dots, v_p, b.$$

b är en lin. komb. av $v_1, \dots, v_p$ <u>omm</u> detta L.E.S. har en lösning.

<u>Def.</u> Det <u>linjära höljet</u> av $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ är mängden av alla linjärkombinationer av $v_1, \dots, v_p$. Vi skriver denna mängd som $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$ och säger att den <u>spänns upp</u> av $v_1, \dots, v_p$.

Ex.





Vår tidigare fråga är ekvivalent med:

"Är $b \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$?"

Matris-vektor-ekvationer

Def. Låt A vara en $m \times n$-matris med kolonner $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ och låt $x \in \mathbb{R}^n$. Vi definierar <u>produkten av A och x</u> som

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

dvs. linjärkombinationen av A:s kolonner med vikterna x_k.

Ex.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 54 \\ 69 \end{bmatrix}$$

Vår tidigare fråga $\Leftrightarrow$ har $Ax = b$ en lösning?

Vad händer om vi låter b variera?

För vilka b har $Ax = b$ en lösning?

Ex. (Lay 1.4.3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Reducering av totalmatrisen ger

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - \frac{1}{2}b_2 + b_1 \end{array}\right]$$

dvs. <u>endast lösbart om $b_3 - \frac{1}{2}b_2 + b_1 = 0$</u>.

<u>Obs.</u>: Ekvationen för ett plan genom origo, $2x - y + 2z = 0$.

$\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$ är precis detta plan!

Sats 1.4.4 Låt A vara en $m \times n$-matris.

Då är följande ekvivalent:

I. Ekvationen $Ax = b$ har en lösning för varje $b \in \mathbb{R}^m$

II. Varje $b \in \mathbb{R}^m$ är en lin. komb. av kolonnerna i A

III. A:s kolonner spänner upp $\mathbb{R}^m$

IV. A har en pivotposition i varje rad (A, inte $[A\ b]$)

Bevis: I $\Leftrightarrow$ II $\Leftrightarrow$ III från def.. IV $\Rightarrow$ I via ekvivalens av radoperationer: $[A|b] \sim [U|d]$.
I $\Rightarrow$ IV: Välj $d = (0, 0, \dots, 0, 1)$ (t.ex.).

Def. Skalärprodukten av två vektorer $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

ges av
$$u \bullet v = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k .$$
OBS: $u \cdot v \in \mathbb{R}$!

Kan även skrivas (u, v), $\langle u, v \rangle$, $\langle u | v \rangle$, $u.v$, etc.

(Kärt barn har många namn...)

Ex.
$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1,2,3) \bullet x \\ (4,5,6) \bullet x \\ (7,8,9) \bullet x \end{pmatrix}$$
"rad kolonn - regeln"

Sats 1.4.5
$$A(u+v) = Au + Av \quad \text{och} \quad A(cu) = cAu$$
(Dvs. matris-vektor-multiplikation är en linjär operation.)

Bevis:
$$A(u+v) = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k u_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k v_k = Au + Av.$$

Homogena L.E.S.

Observation: Om p är en lösning till $Ax = b$ så kan vi skriva alla lösningar som $x = p + v$ där v löser $Ax = 0$.

Bevis ($\Rightarrow$): $A(p+v) = Ap + Av = b + 0 = b$

($\Leftarrow$): Se övn. 25 (1.5).

(Jämför endim-kursen: $y'' + c_1 y' + c_2 y = f$
Partikulärlösning, homogen lösning.)

Def. Ett L.E.S är homogent om det kan skrivas som $Ax = 0$.

Icke-triviala lösningar, $x \neq 0$?

Skriv på radkanonisk form $\Rightarrow$ Måste ha fria variabler

Annars: $\begin{cases} x_1 + \cdots = 0 \\ x_2 + \cdots = 0 \\ \quad\vdots \\ x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow x_n = 0.$

Antag att x_2, x_4 är fria variabler och x_1, x_3 är bundna.

Vi har då formen

$$\begin{cases} x_1 + cx_2 + dx_4 = 0 \\ x_3 + ex_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} cx_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} dx_4 \\ ex_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -d \\ -e \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -c \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ -e \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} = x_2 v_1 + x_4 v_2$$

dvs. ett plan i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av v_1 och v_2

$\boxed{\text{Detta kallas parametrisk form}}$

Slutsats: Om p är en lösning till $Ax = b$ kan vi skriva alla lösningar som

$$x = p + \sum_{k=1}^{r} s_k v_k ,$$

där r är antalet fria variabler och s_k är godtyckliga