IDAG: Övningstenta

4h, 50p = $\underset{\text{endast svar}}{10 \cdot 3p}$ + $\underset{\text{riktiga lösningar}}{4 \cdot 5p}$ + $\underset{\text{max. 6p}}{\text{bonus}}$

Betyg 3: $\geq 20p$ 4: $\geq 30p$ 5: $\geq 40p$

---

① Hur många lösningar har

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 1x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

? Ange dessa, om några.

Totalmatris:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{array}\right] -3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right] \Rightarrow$$

entydig lösning, så fortsätt:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

så SVAR: 1 lösning, $(x_1, x_2, x_3) = (2, -2, 1)$.

---

③ Bestäm en ortonormal bas för planet

$$\text{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{x_2} \right\}.$$

Gram-Schmidt: $v_1 = x_1$, $v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{-5}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\{v_1, v_2\}$ ortogonal bas, så

SVAR: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} / \sqrt{5}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} / \sqrt{21} \right\}$.

---

④ Bestäm volymen av parallellpipeden P med hörnen origo, $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_1}$, $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{x_2}$ och $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{x_3}$

Volymen ges av $\left| \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \right|$, så $\longrightarrow$

(4) forts.

$$\mathrm{vol}(P) = \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \right| = \left| 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right|$$

kofaktor exp. längs kolonn 1

$$= \left| 1\cdot(-2-4) - 1\cdot(6-0) \right| = |-12| = 12$$

SVAR: $\mathrm{vol}(P) = 12$.

(6) Kar. ekv. och egenvärden för $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$?

Kar. ekv.:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \left.\begin{matrix} (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \\ +3(2-\lambda) \\ -3(4-\lambda) \\ +6 \end{matrix}\right\} = 0$$

Egenvärdena är nollställena, så

SVAR: $(1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$, egenvärden $1, 2, 4$.

(8) Klassificera kvad. formen $Q(x) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$.

Matrisform: $$Q(x) = x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A} x$$

Egenvärden för A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(2-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 6\lambda - 1$$

$$= (\lambda - 3)^2 - 10, \text{ så } \lambda = 3 \pm \sqrt{10}.$$

$\sqrt{10} > 3$ så $\lambda_1 < 0$ och $\lambda_2 > 0$.

SVAR: Indefinit.

(9) Bas $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\4\\-1\end{bmatrix}}_{b_3} \right\}$.

$\mathcal{B}$-koord. för $u = \begin{bmatrix}-1\\-7\\7\end{bmatrix}$ och standardkoord. för $[v]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$?

Vi har $x = P_\mathcal{B}[x]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & 4\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}[x]_\mathcal{B}$

så $v = P_\mathcal{B}[v]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}5\\7\\-3\end{bmatrix}$. För $[u]_\mathcal{B}$, lös $P_\mathcal{B}[u]_\mathcal{B} = u$:

Alt. $\mathcal{B}$ ortogonal!

$$\Rightarrow [u]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}\frac{u\cdot b_1}{b_1\cdot b_1}, & \frac{u\cdot b_2}{b_2\cdot b_2}, & \frac{u\cdot b_3}{b_3\cdot b_3}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}6/2\\9/9\\-36/18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}$$

SVAR: $[u]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}5\\7\\-3\end{bmatrix}$.

---

(10) Finns x så att $x = [x]_\mathcal{B}$ med detta $\mathcal{B}$? Vad skulle x i så fall kallas?

I så fall, $x = P_\mathcal{B}[x]_\mathcal{B} = P_\mathcal{B}x$, så x egenvektor till $P_\mathcal{B}$.

Motsvarar egenvärdet $\lambda = 1$, dvs. $\det(P_\mathcal{B} - I) = 0$.

Men
$$\begin{vmatrix}0 & -2 & 1\\0 & 0 & 4\\1 & 2 & -2\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}-2 & 1\\0 & 4\end{vmatrix} = -8,$$

så $\lambda = 1$ är <u>inte</u> ett egenvärde.

SVAR: Nej, ingen egenvektor till basbytesmatrisen.

Nu tar vi de tre sista uppgifterna där utförligare lösning behöver redovisas.

Uppgift 11 har vi gjort flera gånger för andra A.

(12) $T: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + s x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

a) T linjär? b) Standardmatris?

c) Injektiv/surjektiv?

---

a) Vi vill visa att $T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$

för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$ och $a, b \in \mathbb{R}$. Vi får

$$T(ax+by) = T\left(\begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 + s(ax_2 + by_2) \\ ax_2 + by_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax_1 + asx_2 \\ ax_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} by_1 + bsy_2 \\ by_2 \end{bmatrix} = aT(x) + bT(y)$$

enligt räknelagarna för vektorer.

b) Vi skriver helt enkelt $\begin{bmatrix} x_1 + sx_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$ som en

matris-vektor-produkt:

$T(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$, och $\overset{\text{detta}}{A}$ är standardmatrisen.

c) (Alt 1.)

Injektiv: $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$

Men $\begin{bmatrix} x_1 + sx_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + sy_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow x_1 = y_1 \Rightarrow x = y$,

så ja, T är injektiv.

Surjektiv: Vi kan lösa $T(x) = y$ för alla $y \in \mathbb{R}^2$.

Men $\begin{bmatrix} x_1 + sx_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - sy_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$,

så ja, T är surjektiv.

c) (Alt. 2)

Satsen om inv. matriser: A inv. $\Rightarrow x \mapsto Ax$ både

injektiv och surjektiv.

Men $\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, så detta håller.

(13) Homogent L.E.S. med 7 ekv., 10 variabler har precis 5 icke-triviala, lin. ober. lösningar.

a) ⇒ att det icke-homogena systemet alltid är lösbart?

b) Formulera satsen vi använde för a) och def. de två huvudkoncepten

---

a) Vi skriver systemet som $Ax = b$ med $A \in \mathbb{R}^{7\times 10}$. Vi vet att $\text{Nul}\,A = \text{Span}\{x_1, \dots, x_5\}$ där $\{x_1, \dots, x_5\}$ lin. ober. $\Rightarrow \dim \text{Nul}\,A = 5$

Rangsatsen ger att $\dim \text{Col}\,A = 10 - \dim \text{Nul}\,A = 5$.

Alltså är Col A inte hela $\mathbb{R}^7$, så vi kan inte lösa det icke-homogena systemet för alla högerled $b \in \mathbb{R}^7$. (Men lösbart om $b \in \text{Col}\,A$.)

b) Sats (Rangsatsen)

Låt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Då gäller att

$$\text{rank}\,A = \dim \text{Col}\,A = \dim \text{Row}\,A \quad \text{och}$$

$$\text{rank}\,A + \dim \text{Nul}\,A = n.$$

Def. Dimensionen av ett vektorrum V är antalet basvektorer i en bas för V. (Om $V = \{0\}$ så $\dim V = 0$.)

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ så är nollrummet till A mängden $\text{Nul}\,A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \vec{0}\}$

Kanske tycker man att Col A är mer "huvudsakligt". I så fall:

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ så är kolonnrummet till A mängden $\text{Col}\,A = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n\}$.

(14) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) $Ax=b$ inkonsistent.

b) Minstakvadrat-lösning $\hat{x}$ via normalekvationerna

c) — " — -felet.

---

a) Radreducera:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

dvs. ingen lösning.

b) Normalekv.: $A^T A \hat{x} = A^T b$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$[A^T A \,|\, A^T b] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 12/3 - 8/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right]$$

så $\hat{x} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

c) Residualen är $A\hat{x} - b = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 9/2 \\ 3 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

så minstakvadrat-felet blir

$$\|A\hat{x} - b\| = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$