IDAG: Linjärt oberoende och linjära avbildningar

Mål (urval): Förstå begreppen ↑

Skriva linjära avbildningar på matrisform

Vi såg i F2 att frågan "har $Ax=0$ icke-triviala lösningar?" är viktig. Övn. 2.2.23 (kan göras nu) visar att om $A \in \underline{\mathbb{R}^{n\times n}}$ och $Ax=0$ <u>endast</u> har den triviala lösningen så är $Ax=b$ lösbart <u>för alla b</u>.

Detta motiverar:

<u>Def.</u> En mängd vektorer $\{v_1,\dots,v_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ är <u>linjärt oberoende</u> ifall ekvationen

$$c_1v_1+\dots+c_pv_p=0 \qquad (*)$$

endast har lösningen $c_k=0$, $k=1,\dots,p$. Mängden är <u>linjärt beroende</u> annars, dvs. om det finns $\{c_k\}_{k=1}^{p}$ med något $c_j\neq 0$ så att $(*)$ håller, och $(*)$ är då ett <u>linjärt samband</u> mellan $v_1,\dots,v_p$.

Dvs. om matrisen $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ har linjärt oberoende kolonner så är $Ax=b$ lösbart.

(Vi ska studera dessa kopplingar i mer detalj i nästa läsvecka.)

<u>Ex.</u> Är vektorerna $\underbrace{\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}}_{v_1}$, $\underbrace{\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}}_{v_2}$ och $\underbrace{\begin{bmatrix}3\\5\\7\end{bmatrix}}_{v_3}$ $\underbrace{\text{lin. ober.}}_{}$?

Vanlig (Tony)-förkortning för linjärt oberoende.

$$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0 \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\3&4&5&0\\5&6&7&0\end{array}\right]\begin{matrix}\\ \cdot(-3)\\ \cdot(-5)\end{matrix}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-2&-4&0\\0&-4&-8&0\end{array}\right]\begin{matrix}\\ *(-\tfrac12)\\ -2\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Alltså är c_3 en fri variabel, så <u>nej</u>, $\{v_1,v_2,v_3\}$ är <u>lin. ber.</u>.

Radkanonisk form: $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$

ger t.ex. $c_3=1$, $c_2=-2$, $c_1=1$ så att

$1v_1-2v_2+1v_3=0$ är ett linjärt samband.

(Kontrollera att det stämmer!)

Specialfall

(I) 1 vektor, $\{v_1\}$: $c_1 v_1 = 0$, $c_1 \neq 0$?

Lin. ber. $\Leftrightarrow$ $v_1 = 0$.

(II) 2 vektorer, $\{v_1, v_2\}$: $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$, $c_1 \neq 0$ eller $c_2 \neq 0$?

Låt kravet vara $c_1 \neq 0$ (annars byt ordning).

Lin. ber. $\Leftrightarrow$ $v_1 = -{}^{c_2}/_{c_1} v_2 = d v_2$.

(III) Sats 1.7.8: Fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende.

Bevis: $Ax = 0$ motsvarar ett L.E.S. med n ekvationer och fler än n obekanta.
Dvs. det finns fria variabler och vi har en icke-trivial lösning. □

(IV) Sats 1.7.9: Mängden $\{v_k\}_{k=1}^p$ där $v_j = 0$ för något j är alltid linjärt beroende.

Bevis: Antag $v_1 = 0$ (annars omnumrera). Då är

$$1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_p = 0.$$ □

Allmän karakterisering

Sats 1.7.7 Mängden $S = \{v_k\}_{k=1}^p$ är lin. ber. omm minst en v_j är en linjärkombination av de övriga vektorerna. Om $v_1 \neq 0$ så gäller att något v_j, $j > 1$, är en lin.komb. av $v_1, \dots, v_{j-1}$.

Bevis: ($\Leftarrow$) Antag att $v_j = c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p v_p$.

Då är $c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} - 1 v_j + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p v_p = 0$, dvs. S är lin. ber.

($\Rightarrow$) Antag att S är lin. ber. Om $v_1 = 0$ så är $v_1 = 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_p$ (dvs. en lin. komb.) Annars har vi $v_1 \neq 0$ och $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0$.

Gå baklänges tills vi hittar ett $c_j \neq 0$ (garanterat $j > 1$, annars får vi $c_1 v_1 = 0$ som är omöjligt då $v_1 \neq 0$), dvs. $c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p v_p = 0$. Men då har vi

$$c_j v_j = -c_1 v_1 - \dots - c_{j-1} v_{j-1}.$$ □

Linjära avbildningar

$Ax = b \iff$ ett L.E.S.

Men vi kan också tolka Ax, "utan b".

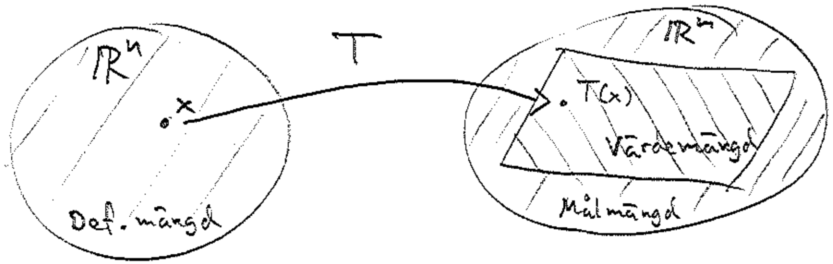
> Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $x \in \mathbb{R}^n$ så är $Ax \in \mathbb{R}^m$, dvs. vi kan se A som en funktion mellan $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$.

För att skilja på matrisen A och "funktionen A" brukar vi kalla funktionen för t.ex. T och säger att $T(x) = Ax$. Mer noggrant:

Def. En avbildning (eller funktion, transformation) T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en regel som tilldelar ett element i $\mathbb{R}^m$ till varje element i $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ kallas avbildningens definitionsmängd och $\mathbb{R}^m$ dess målmängd. Vi skriver $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Om $x \in \mathbb{R}^n$ så kallas $T(x)$ bilden av x, och mängden $\{T(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ kallas T:s värdemängd.



OBS: En avbildning T behöver inte ges av $T(x) = Ax$ för en matris A, men vi kommer se att det gäller för alla linjära avbildningar:

Def. En linjär avbildning T uppfyller, för alla u, v i T:s def.mängd och för alla $c \in \mathbb{R}$;

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \text{och} \quad T(cu) = cT(u).$$

Alt. def.: $T(c_1v_1 + \dots + c_pv_p) = c_1T(v_1) + \dots + c_pT(v_p)$ (se Lay), dvs. "T bevarar lin. komb."

Om en avbildning ges av en matris A skriver vi den som $x \mapsto Ax$.

En typisk fråga i denna nya notation är

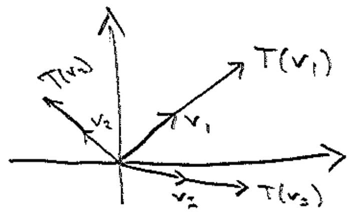
"Är b i värdemängden för avbildningen $T: x \mapsto Ax$?"

Detta betyder bara "Är $Ax=b$ konsistent?"

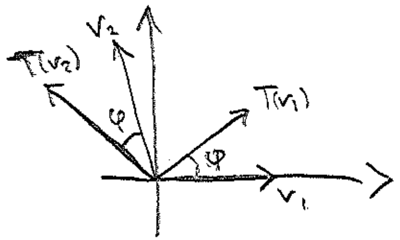
Lay p.81 har utförligt exempel.

Geometriska exempel

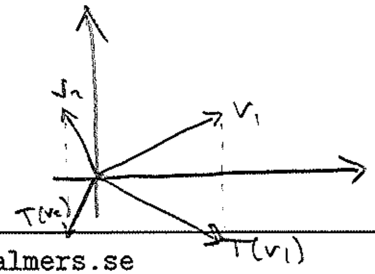
Skalning, $x \mapsto \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}x$:



Rotation, $x \mapsto \begin{pmatrix}\cos\varphi, & -\sin\varphi\\ \sin\varphi, & \cos\varphi\end{pmatrix}x$:



Spegling, $x \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}x$:



Fråga: Om vi vet de geometriska egenskaperna av (den linjära) avbildningen T, kan vi hitta en matris som beskriver T?

Svar: Ja! Och det räcker att veta vad T gör med enhetsvektorerna, $e_j = (0,0,\dots,0,\underset{\text{plats } j}{1},0,\dots,0)$.

Antag $x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Då har vi $x = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,

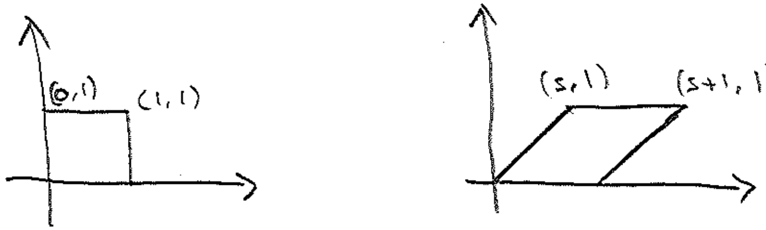
så $T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \underset{\text{linjär}}{=} x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3)$.

Vi kan också skriva detta som

$$T(x) = \underbrace{\begin{bmatrix}T(e_1) & T(e_2) & T(e_3)\end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}_{x}.$$

Sats 1.9.10: Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns det precis en matris sådan att $T(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$. Denna $m\times n$-matris kallas standardmatrisen för T och ges av $A = \begin{bmatrix}T(e_1) & \cdots & T(e_n)\end{bmatrix}$. Bevis: se Lay.

Ex. Avbildningen T som transformerar enhetskvadraten enligt



kallas en skjuvning (eng.: shear).

Vi ser att $T(e_1) = e_1$ och $T(e_2) = \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}$.

Alltså har vi standardmatrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Kontroll: $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Mer funktionsnotation

Def. En avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är surjektiv (alt. "på") om dess värdemängd är $\mathbb{R}^m$.

Dvs. om en surjektiv avb. T har standardmatrisen A så har alltid $Ax=b$ en lösning.

Def. En avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är injektiv om varje $b \in \mathbb{R}^m$ är bilden av högst ett $x \in \mathbb{R}^n$.

OBS: Kan vara inget x för vissa b!

Alt. def.: T är injektiv ifall $T(x) = T(y)$ betyder att $x = y$.

Dvs. $Ax=b$ har antingen ingen lösning eller en unik lösning.

Ex. Avbildningen

$T: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ är både surjektiv och injektiv

$T: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ är ingetdera (kan inte nå t.ex. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, och $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$.)

$T: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$ är surjektiv men inte injektiv $\left(T((1,0,0)) = T((1,0,1)) \right)$

$T: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ är inte surjektiv, men injektiv. (kan inte nå t.ex. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$)

<u>Sats 1.9.11</u> Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avb. Då är T injektiv omm $T(x)=0$ endast har den triviala lösningen.

<u>Bevis</u>: Vi vet att $T(0)=0$ (linjär).

Injektiv $\Rightarrow$ ingen annan lösning.

Inte injektiv: Det finns $b \in \mathbb{R}^m$ och $u,v \in \mathbb{R}^n$ så att $T(u)=T(v)=b$ och $u \neq v$.

T linjär $\Rightarrow$ $T(u-v) = T(u)-T(v) = b-b = 0$

dvs. $x = u-v \neq 0$ är en annan lösning till $T(x)=0$. $\square$

Som ni ser så kan man se samma sak på många olika sätt, och de har alla olika fördelar.

Ta en definition i taget!

Jämför med resultaten om parametrisk form, F2.6.

<u>Sats 1.9.12</u> Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avb. med standardmatrisen A. Då gäller

I) T är surjektiv omm A:s kolonner spänner upp $\mathbb{R}^m$.

II) T är injektiv omm A:s kolonner är linjärt oberoende.

Bevis: Se Lay.