IDAG: Matrisalgebra

Mål (urval): Räkna med matriser

Förstå och använda inversen av en matris

I F1 jobbade vi med totalmatrisen $[A\ b]$ för ett L.E.S. och i F2 gick vi över till koeff. matrisen A. I F3 såg vi att en matris kan ses som en linjär avbildning.

Nu vill vi manipulera matriser, t.ex. addera eller multiplicera dem.

Först lite notation:

$A = (a_{ij})$ betyder att A har elementet a_{ij} på plats (i,j), dvs. rad i, kolonn j. (Ibland skrivs $a_{ij} = (A)_{ij}$.)

$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ betyder att A har kolonnerna $a_1, \dots, a_n$

$0_{m\times n} = (0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kallas noll-matrisen (av storlek $m\times n$)

I_n betecknar identitetsmatrisen i $\mathbb{R}^{n\times n}$ som har värdet 1 på diagonalen (plats (i,i)) och värdet 0 annars.

Def. Låt $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$ vara $m\times n$-matriser.

Då är $A = B$ om $a_{ij} = b_{ij}$ för $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Vidare är

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \text{ och } cA = (ca_{ij}) \text{ för alla } c \in \mathbb{R}.$$

Dvs. komponentvis addition och mult. med skalär.

Precis som för vektorer får vi direkt att (t.ex.)

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{och} \quad A + B = B + A$$

Se Lay Sats 2.1.2!

För vektorer kunde vi inte definiera produkter (skalärprodukten ger inte en vektor som resultat), men för matriser är det naturligt.

Antag att $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ och $x \in \mathbb{R}^r$. Då är

$Bx \in \mathbb{R}^n$ och $A(Bx) \in \mathbb{R}^m$.

Men $Bx = x_1\vec{b_1} + \dots + x_r\vec{b_r}$, så

$$A(Bx) = x_1 A\vec{b_1} + \dots + x_r A\vec{b_r}$$
$$= [A\vec{b_1} \cdots A\vec{b_r}]\, x \quad , \text{ där } A\vec{b_k} \in \mathbb{R}^m,\ k = 1, \dots, r.$$

Därför definierar vi

<u>Def.</u> Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ så ges <u>produkten</u> av A och B av $AB \in \mathbb{R}^{m\times r}$,

där $AB = [A\vec{b}_1 \; \cdots \; A\vec{b}_r]$.

OBS: Bara def. om dimensionerna stämmer!

<u>Ex.</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ger

$$AB = \left[A\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \; A\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

För att kontrollera om flera matriser är multiplicerbara kan man skriva ner deras dimensioner som

$m\times n \quad n\times r \quad r\times s \quad s\times p$

Om talen mellan två kryss är samma "går det ihop".

Här blir slutresultatet en $m\times p$-matris.

OBS 1: Även om AB är def. behöver inte BA vara det!

Dvs. $\boxed{AB \neq BA}$ i allmänhet. Ifall $AB = BA$ säger vi att A och B <u>kommuterar</u>.

OBS 2: $AB = AC \not\Rightarrow B = C$. (Övning 2.1.10.)

OBS 3: $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ eller $B = 0$ (Övning 2.1.12.)

<u>"Rad-kolonn-regeln"</u>

Vi såg i F2 att $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} (1,2)\cdot x \\ (3,4)\cdot x \end{bmatrix}$,

där $\cdot$ betecknar skalärprodukten.

Detta ger att

> Elementet på plats (i,j) i AB ges av skalärprodukten av den i:te raden i A och den j:te kolonnen i B.

Dvs. "$\frac{\text{rad}}{}\Big|_{\text{kolonn}}$ -regeln"

$$(AB)_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}) = \text{row}_i(A) \cdot \text{col}_j(B)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Ex. $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ $\Rightarrow$ $AB \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Notera att rad 1 ges av $[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}] \underbrace{[\vec{b}_1\ \vec{b}_2]}_{=B}$.

Generellt:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{row}_i(AB) &= \text{row}_i(A)\,B \\ \text{col}_j(AB) &= A\,\text{col}_j(B). \end{aligned}}$$

Fler matrisoperationer

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ och k ett heltal så definierar vi potensen $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ st.}}$ och $A^0 = I_n$.

Tänk igenom varför A måste vara kvadratisk ($n\times n$) här.

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definierar vi transponatet av A som $n\times m$-matrisen A^T, vilken ges av $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$.

Dvs. A^T:s kolonner är A:s rader och vice versa.

Man visar lätt (övn. 2.1.33!)

Sats 2.1.8

I $(A^T)^T = A$

II $(A+B)^T = A^T + B^T$

III $(cA)^T = cA^T$, $c \in \mathbb{R}$

IV $(AB)^T = B^T A^T$.

Notera IV: omvänd ordning!

Matrisinversen

Vi har redan en additiv invers för matriser:

$$A + (-A) = 0 = -A + A.$$

Nu definierar vi en multiplikativ invers:

Def. Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar om det finns en matris C så att $CA = AC = I_n$. I så fall är C unik (se Lay). Vi kallar den inversen till A och betecknar den A^{-1}.

<u>Def.</u> Om A inte är inverterbar säger vi att den är <u>singulär</u>. (Inverterbara matriser kallas ibland icke-singulära.)

Specialfall

* Om $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, dvs. $A = (a)$, $a \in \mathbb{R}$, så är A inverterbar omm $a \neq 0$ och inversen är $A^{-1} = (\frac{1}{a})$.

* <u>Sats 2.2.4</u> Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Då är A inv. om $ad-bc \neq 0$ och $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Annars är A singulär.

Kontroll: $AA^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{bmatrix} = I_2}$

Bevis: Övn. 2.2.25, 2.2.26.

Allmänna fallet snart, först lite konsekvenser:

Egenskaper

<u>Sats 2.2.6</u>

I. A inv. $\Rightarrow$ A^{-1} inv. och $(A^{-1})^{-1} = A$.

II. $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, båda inv. $\Rightarrow$ AB inv. och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

III. A inv. $\Rightarrow$ A^T inv. och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

<u>Bevis:</u> II: $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I_n = AIA^{-1} = ABB^{-1}A^{-1}$

I, III: se Lay.

(Jämför Sats 2.1.3 IV)

<u>Sats 2.2.5</u> Om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar så har $Ax = b$ en unik lösning för alla $b \in \mathbb{R}^n$ som ges av $x = A^{-1}b$.

<u>Bevis:</u> Låt $b \in \mathbb{R}^n$ och sätt $x = A^{-1}b$. Då är $Ax = AA^{-1}b = b$, så vi har minst en lösning. Den är unik eftersom $Ay = b \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}y = \underbrace{A^{-1}b}_{=x} \Rightarrow y = x$. $\square$

Fråga: Hur hittar vi A^{-1} för $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n>2$?

Kort svar: Radreducera $[A \ I_n] \sim [I_n \ A^{-1}]$

Längre svar:

Vi kan uttrycka de tre elementära radoperationerna som matrismultiplikationer (från vänster).

Ex. $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = I_3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, så

$E_1 A = A - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, dvs. subtrahera 2 * rad 2 från rad 3.

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ byter plats på rad 2 och rad 3

$E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ skalar om rad 1 med faktorn 2

Dessa typer av matriser kallas elementära matriser.

Vi kan bestämma dem genom att utföra den önskade radoperationen på I_n, eftersom t.ex. $E_1 I = E_1$.

Sats En elementär matris är inverterbar.

Bevis: Detta följer direkt från att radoperationer är reversibla.

Sats 2.2.7 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar omm A är radekvivalent med I_n.

De radoperationer som reducerar A till I_n reducerar I_n till A^{-1}.

Bevis: $(\Rightarrow)$: A inv. $\underset{\text{Sats 2.2.5}}{\Longrightarrow}$ $Ax=b$ lösbart för alla b $\Rightarrow$

$\underset{\text{Sats 1.1.4}}{\Longrightarrow}$ A har en pivotposition i varje kolonn

$\underset{A\in\mathbb{R}^{n\times n}}{\Longrightarrow}$ Den radkanoniska formen av A är I_n.

$(\Leftarrow)$: Om $A \sim I_n$ kan vi skriva radreduceringen som

$E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1 A = I_n$, där E_k är elementära matriser.

Men E_k är inverterbar, så även $E_p \cdots E_1$ är inverterbar. (Sats 2.2.6)

forts.

$$\Rightarrow \quad A = (E_p \cdots E_1)^{-1} \underbrace{(E_p \cdots E_1) A}_{= I_n} = (E_p \cdots E_1)^{-1}.$$

Alltså är A inv. och $A^{-1} = E_p \cdots E_1$, dvs.

$A^{-1} = E_p \cdots E_1 I_n$. $\square$

> För att bestämma A^{-1} kan vi alltså radreducera $[A \ I_n]$. Detta kommer antingen ge $\sim [I_n \ A^{-1}]$ eller visa att A är singulär.

<u>OBS</u> Beräkna bara A^{-1} för att titta på dess struktur, <u>aldrig</u> för att lösa $Ax = b$. Att radreducera $[A \ b]$ är både billigare och mer felsäkert.

[Sats 2.3.8. om inv. matriser på nästa sida.]

Sats 2.3.8 (Satsen om inv. matriser)

$\boxed{A \in \mathbb{R}^{n \times n}}$

$\exists$ betyder "det existerar"
$\forall$ betyder "för alla"
s.a. = så att

$$A^T \text{ inv.} \overset{\text{Sats 2.2.6}}{\Longleftrightarrow} A \text{ inv.}$$

$$A \text{ inv.} \xRightarrow{C = A^{-1}} \exists C \text{ s.a. } CA = I \xRightarrow{x = CAx = 0} Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x \mapsto Ax \text{ är injektiv} \overset{\text{Sats 1.9.12}}{\Longleftrightarrow} \{a_1, \dots, a_n\} \text{ är lin. indep.} \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0 \xRightarrow{\text{Övn. 2.2.23}} A \text{ har } n \text{ pivotpositioner} \Longrightarrow A \sim I_n \xRightarrow{\text{sats 2.2.7}} A \text{ inv.}$$

$$A \text{ inv.} \xRightarrow{D = A^{-1}} \exists D \text{ s.a. } AD = I_n \xRightarrow{b = A\underbrace{Db}_{=x}} \forall b \in \mathbb{R}^n \; \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ s.a. } Ax = b \xRightarrow{\text{Övn. 2.2.24}} A \sim I_n$$

$$\forall b \in \mathbb{R}^n \; \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ s.a. } Ax = b \overset{\text{Sats 1.4.4}}{\Longleftrightarrow} \text{Span}\{a_1, \dots, a_n\} = \mathbb{R}^n \overset{\text{Sats 1.9.12}}{\Longleftrightarrow} x \mapsto Ax \text{ är surjektiv}$$

$$\forall b \in \mathbb{R}^n \; \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ s.a. } Ax = b \xRightarrow{\text{Sats 1.1.4}} A \text{ har } n \text{ pivotpositioner}$$