IDAG: Matrisfaktorisering

Blockmatriser

Mål: Bestämma $A = LU$

Se fördelar med faktoriseringar och partitioneringar

Ex. (Rep. av elementära matriser)

Enkel radreducering:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} A$$

Ett steg till:

$$A \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{} = U$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3} E_2 E_1 A$$

Dvs. $A \sim U = E_3 E_2 E_1 A$

Generellt: $\boxed{E_p \cdots E_2 E_1 A = U}$

där U är trappstegsformen av A.

Def. En matris $A = (a_{ij})$ är

<u>undertriangulär</u> om $a_{ij} = 0$ då $j > i$

<u>övertriangulär</u> om $a_{ij} = 0$ då $j < i$

Dvs.
$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Observation: U övertriangulär, och om vi inte gör radbyten så är varje E_k undertriangulär.

Men då är också $E_p \cdots E_1$ undertriangulär!

Bevis: $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ undertriangulära:

$b_{ij} = c_{ij} = 0$ då $j > i$.

$$(BC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{i} b_{ik} c_{kj}, \text{ och}$$

$$j > i \Rightarrow j > k \Rightarrow c_{kj} = 0 \Rightarrow (BC)_{ij} = 0. \quad \square$$

Eftersom E_k är inv. är $E_p \cdots E_1$ också inv.

så $A = LU$ där $L = (E_p \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}$

och L undertriangulär eftersom L^{-1} undertriang. (Övn. 2.5.19!)

Även: E_k har värdet 1 på diagonalen $\Rightarrow$ L också

Def. En LU-faktorisering av $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ges av en undertriangulär matris L med värdet 1 på diagonalen, och en övertriangulär matris U sådana att $A = LU$.

För att bestämma L, U kan vi radreducera A och multiplicera ihop L via E_k^{-1}.

Mer effektivt är att observera att

$$E_p \cdots E_1 L = I$$

och direkt sätta in element i L så att detta gäller.

Ex. (samma A)

Bara E_1, E_2 påverkar första kolonnen av A och de rör en enda rad vardera. Alltså måste första kolonnen av L vara $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(Detta är första pivotkolonnen, delat med pivotelementet.)

Bara E_3 påverkar kolonn nr. 2, så kolonn 2 av L måste vara $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(Andra pivotkolonnen, delat med pivotelementet.)

Sista kolonnen är såklart $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Alltså: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (Kontrollera att $A = LU$!)

Notera att vi måste radreducera, men vi behöver inte matrismultiplicera.

Varför är detta bra?

Vi kan nu lösa $Ax = b$ effektivt via en tvåstegsprocess.

Låt $y = Ux$ vara en ny (okänd) variabel

Då har vi $\longrightarrow$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \qquad (Ax = LUx = b)$$

Att lösa $Ly = b$ är lätt då det har formen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Detta kallas <u>framåtsubstitution</u>, vi löser först ut y_1, sen y_2, osv.

När vi har y kan vi lösa $Ux = y$:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (\underline{\text{bakåtsubstitution}})$$

Mycket billigare ($\sim 2n^2$ operationer) än att lösa $Ax = b$ direkt ($\sim \frac{2}{3}n^3$ oper.).

(Bestämma $A = LU$ också $\sim \frac{2}{3}n^3$, så bara fördel för flera olika högerled.)

Det finns många andra faktoriseringar med andra fördelar, t.ex. QR, VDV^{-1}, $U\Sigma V^T$, LL^T, ...

De två första återkommer vi till senare i kursen.

<u>Blockmatriser</u>

Om A och B har samma antal rader kan vi bilda en större matris $[A \ B]$. På samma sätt, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ om dimensionerna passar ihop.

Vi kan såklart även göra tvärtom:

Ex. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Då kan vi skriva

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad A_{11} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; A_{21} = 0_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_{22} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}.$$

Poängen med detta är att förenkla matrisräkningar.

Om $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ med samma blockindelning

så är

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & , & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & , & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

Vi kan göra dessa beräkningar parallellt, t.ex. på olika processorer i en dator.

Via rad-kolonn-regeln får vi liknande för matrismultiplikation:

Ex. Samma A, nytt $B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$ med $B_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \end{bmatrix}$

Då är

$$AB = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 5 + 2\cdot 9 & , & 6 + 2\cdot 10 \\ 7 + 3\cdot 10 & , & 8 + 3 \cdot 10 \\ \hline 0 + 4\cdot 9 & , & 0 + 4 \cdot 10 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} 2\cdot 9 & 2\cdot 10 \\ 3\cdot 9 & 3 \cdot 10 \\ \hline 4\cdot 9 & 4 \cdot 10 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} \\ A_{21}B_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12}B_{21} \\ A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

Dvs. vi kan utföra multiplikationen som om blocken vore tal! (Om dimensionerna passar ihop.)

På liknande sätt ser vi att

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}$$

Notera att A_{12} och A_{21} transponerats och <u>bytt plats</u>. (Övn.: visa detta!)

Vi kan även (ibland) bestämma inverser enklare:

<u>Ex.</u> Låt $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ vara inv. med A_{11} och A_{22} kvadratiska och ansätt $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ (samma blockindelning)

Vi får

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I = AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & , & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & , & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11}B_{11} = I$ ger (Sats 2.3.8) att A_{11}^{-1} existerar, så

$\boxed{B_{11} = A_{11}^{-1}}$ och $A_{11}B_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{B_{12} = 0}$

$\Rightarrow I = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = A_{22}B_{22}$

$\Rightarrow A_{22}^{-1}$ existerar och $\boxed{B_{22} = A_{22}^{-1}}$

Slutligen får vi B_{21} från $A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0$

så

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

dvs. det räcker att vi kan invertera A_{11} och A_{22}.

Extra: Läs gärna 2.7 i Lay (bra för Lab 3) och nästa sida.

Geometrisk tolkning av matrisoperationer

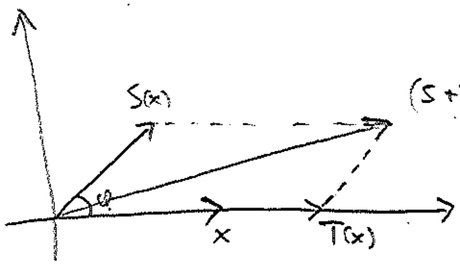
Vi införde $A+B$, AB och A^{-1} utan mycket mer motivering än att det är "naturligt".

Via tolkningen som linjär avbildning kan vi dock ge en tydlig geometrisk tolkning:

Låt de linjära avbildningarna S och T ges av matriserna A och B. Då ges standardmatrisen för

$\boxed{\text{Summan } S+T \text{ av } A+B}$

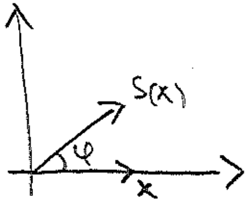
Ex.



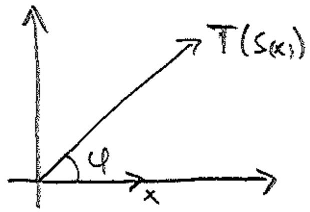
Rotation (S) plus skalning (T)

$\boxed{\text{Kompositionen } TS \text{ av } BA}$

$$x \xrightarrow{S} S(x) \xrightarrow{T} T(S(x))$$



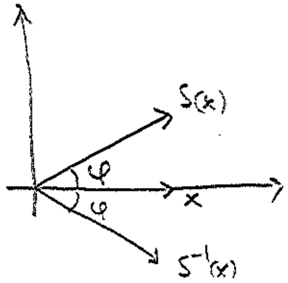
Rotation



Rotation och sen skalning

$\boxed{\text{Inversen } S^{-1}: S(x) \mapsto x \text{ av } A^{-1}}$

$$x \underset{S^{-1}}{\overset{S}{\rightleftarrows}} S(x)$$



Rotation i omvänd riktning.

(Se $\underbrace{\text{Lay}}_{\text{s. 131-132}}$ för def. av inversen S^{-1}!)