IDAG: Vektorrum och underrum

Mål:
- Se att det finns många andra objekt som beter sig som $\mathbb{R}^n$
- Införa (lite) mer abstrakt notation

Def. Ett vektorrum V är en icke-tom mängd av objekt (kallade vektorer) som går att addera och multiplicera med skalärer. Vidare måste följande räknelagar (axiom) vara uppfyllda för alla $u, v \in V$ och $c, d \in \mathbb{R}$:

I. Summan $u+v \in V$

II. $u+v = v+u$

III. $(u+v)+w = u+(v+w)$

IV. Det finns en vektor $0 \in V$ så att $u+0=u$

V. För varje $u \in V$ finns ett $-u \in V$ så att $u+(-u)=0$

VI. $cu \in V$

VII. $c(u+v) = cu+cv$

VIII. $(c+d)u = cu+du$

IX. $c(du) = (cd)u$

X. $1u = u$.

(Ni lär se denna långa definition i fler kurser.)

Ex. Vi har sett att $\mathbb{R}^n$ uppfyller detta eftersom addition och mult. med skalär är elementvis.

Ex. Låt mängden ℓ^2 ges av oändliga sekvenser $u = (c_1, c_2, \dots) = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ sådana att $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$.

Om $u = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ och $v = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ så definierar vi

$$u+v = \{a_k+b_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad cu = \{ca_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ för } c \in \mathbb{R}.$$

och $u=v$ om $a_k=b_k$, $k=1,2,\dots$.

Man kan visa att $u+v \in \ell^2$, och då

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k)^2 = c^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

är även $cu \in \ell^2$.

De andra axiomen följer lätt (visa det!), så ℓ^2 är ett vektorrum.

Tony Stillfjord tony.stillfjord@chalmers.se

Ex. Låt V vara mängden av alla funktioner från $[0,1]$ till $\mathbb{R}$. Om $f, g \in V$ så def. vi $f+g$ och cf "som vanligt", dvs. för alla $x \in [0,1]$ gäller $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ och $(cf)(x) = cf(x)$.

Alltså är I och VI uppfyllda. T.ex. II följer direkt från $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ och att $f = g$ om $f(x) = g(x)$ för alla $x \in [0,1]$

$\Rightarrow$ V är ett vektorrum (kontrollera resten av axiomen!)

Notera att $f \in V$ här, medans $f(x) \in \mathbb{R} \neq V$.

Underrum

Def. Ett underrum av ett vektorrum V är en delmängd U av V (med samma addition och mult. med skalär) sådan att

I. Nollvektorn $0 \in V$ tillhör också U.

II. Om $u, v \in U$ så är $u + v \in U$. (U sluten under vektoradd.)

III. Om $u \in U$ och $c \in \mathbb{R}$ så är $cu \in U$. (U sluten under mult. med skalär)

OBS: U är också ett vektorrum!

Varje $u \in U$ är också i V, så de flesta av axiomen följer direkt. T.ex. om $u, v \in U$ så är $u+v = v+u$ eftersom detta gäller för $u, v \in V$. Resten följer av kraven ovan.

Ex. $\mathbb{R}^2$ är inte ett underrum av $\mathbb{R}^3$ eftersom det inte är en delmängd av $\mathbb{R}^3$. forts. →

Tony Stillfjord tony.stillfjord@chalmers.se

Ex. forts.

Däremot är $U = \left\{ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \mid v_3 = 0 \right\}$ det,

eftersom $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$, $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$

och $c\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$.

Ex. Låt $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$. Då är $U = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$

ett underrum av $\mathbb{R}^n$, ty

I. $0 \in U$ då $0v_1 + \dots + 0v_p = 0$

II. Om $u = a_1v_1 + \dots + a_pv_p$ och $w = b_1v_1 + \dots + b_pv_p$

så är $u+v = (a_1+b_1)v_1 + \dots + (a_p+b_p)v_p \in U$.

III. På samma sätt: $cu = (ca_1)v_1 + \dots + (ca_p)v_p \in U$.

$\boxed{\text{Ett typiskt underrum av } \mathbb{R}^n \text{ är alltså ett plan genom origo.}}$

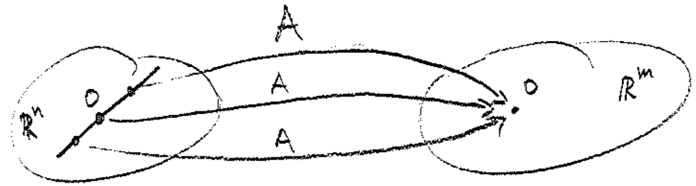
Sats 4.1.1 Om $v_1, \dots, v_p \in V$ så är $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$ ett underrum av V.

Bevis: Som i exemplet.

Viktigt underrum nr. 1: nollrum

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ så är A:s nollrum mängden

$$\mathrm{Nul}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}.$$



Sats 4.2.2 $\mathrm{Nul}(A)$ är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.

Bevis: I. $A0 = 0$, så $0 \in \mathrm{Nul}(A)$.

II. Om $Au = Av = 0$ så är $A(u+v) = Au + Av = 0$.

III. Om $Au = 0$ så är $A(cu) = cAu = 0$ för alla $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Egenskaper:

* Lätt att testa om $v \in Nul(A)$: Beräkna bara Av!
* "Svårt" att hitta ett $v \in Nul(A)$: Måste lösa $Av = 0$.

Detta p.g.a. implicit beskrivning av $Nul(A)$ (via en ekvation).

Vi får en explicit beskrivning genom att skriva $Ax = 0$ på parametrisk form som i F2.

Då har vi t.ex.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_2}, \text{ dvs. } x = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

och vi får alla $x \in Nul(A)$ genom olika val av x_1, x_2.

$\{v_1, v_2\}$ kallas en bas för $Nul(A)$ - mer om detta i F7.

Viktigt underrum nr. 2: kolonnrum

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ har kolonnerna $a_1, \dots, a_n$ så ges A:s kolonnrum av

$$Col(A) = Span\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Vi har redan bevisat

Sats 4.2.3 $Col(A)$ är ett underrum av $\mathbb{R}^m$.

Egenskaper:

* Lätt att hitta ett $v \in Col(A)$: Lin. komb av $a_1, \dots, a_n$
* "Svårt" att testa om $v \in Col(A)$: Måste lösa $Ax = v$.

OBS: Nul(A) och Col(A) är helt skilda saker!

T.ex. är ju $\mathrm{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$ men $\mathrm{Col}(A) \in \mathbb{R}^m$.

(Se tabell i Lay, p.222!)

* Col(A) är relaterat till existensfrågor:

$\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ omm $x \mapsto Ax$ är surjektiv

* Nul(A) är relaterat till entydighetsfrågor:

$\mathrm{Nul}(A) = \{0\}$ omm $x \mapsto Ax$ är injektiv

Vi får

Sats Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar så är $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$ och $\mathrm{Nul}(A) = \{0\}$.

Linjära avbildningar (igen)

Def. Låt V och W vara två vektorrum. En lin. avb. från V till W är en regel som tilldelar ett element i W till varje element i V och som uppfyller

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \quad T(cu) = cT(u)$$

för alla $u, v \in V$ och $c \in \mathbb{R}$.

Ex. $T: x \mapsto Ax$ där $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ är en lin. avb. från $V = \mathbb{R}^n$ till $W = \mathbb{R}^m$.

Def. Kärnan (eng.: kernel) av $T: V \to W$ ges av $\ker(T) = \{u \in V \mid T(u) = 0\}$.

(Samma sak som Nul(A) om T ges av $x \mapsto Ax$.)

Def. Värdemängden av $T: V \to W$ ges av

$$\text{range}(T) = \{ v \in W \mid w = T(u),\ u \in V \}.$$

(Samma sak som $\text{Col}(A)$ om $T: x \mapsto Ax$.)

Sats $\ker(T)$ är ett underrum av V, och
$\text{range}(T)$ — " — W.

Ex. Låt $W = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ är kontinuerlig} \}$

$V = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ är 2 ggr. deriverbar och f'' är kont. $\}$

Då är $D: V \to W$, $Df = f'$ en lin. avb.

eftersom t.ex. $(f+g)' = f' + g'$.

Samma gäller för $D^2 f = f''$.

Sätt $T: V \to W$, $Tf = f'' + \omega^2 f$.

Då ges alla lösningar till $y'' + \omega^2 y = 0$

av $Ty = 0$, dvs. av $\ker(T)$.

Ett nytt sätt att betrakta diff. ekv. på!