IDAG: Baser och koordinatsystem

Mål: Identifiera vektorrum med $\mathbb{R}^n$ via baser

För ett godtyckligt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

har vi $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

där $e_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{\text{plats } j}{1}, 0, \dots, 0)$

är den j:te enhetsvektorn.

Vi kallar $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ en <u>bas</u> för $\mathbb{R}^n$

och $[x]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$ <u>koordinaterna</u> för x i basen $\mathcal{B}$.

(I det här fallet är $[x]_{\mathcal{B}} = x$ då $\mathcal{B}$ är <u>standardbasen</u>.)

<u>Def.</u> En <u>bas</u> för ett vektorrum V är en mängd $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ av linjärt oberoende vektorer som spänner upp V.

<u>Koordinaterna</u> för $x \in V$ i basen $\mathcal{B}$ ges av koefficienterna $[x]_{\mathcal{B}} = (c_1, \dots, c_n)$, där $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$.

OBS 1: Definitionen av koordinater är vettig då dessa är unika: $c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = d_1 b_1 + \dots + d_n b_n$

$\Rightarrow (c_1 - d_1) b_1 + \dots + (c_n - d_n) b_n = 0$

$\overset{\mathcal{B} \text{ lin. ober.}}{\Longrightarrow} c_k - d_k = 0, \ k = 1, \dots, n$ dvs. $c_k = d_k$.

OBS 2: $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ är alltså en bas för $\mathbb{R}^n$ då lin. ober. och $\text{Span}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$

OBS 3: Vi får direkt att om $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ är lin. ober. så är $\mathcal{B}$ en bas för $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$.

(Kom ihåg att detta är ett vektorrum!)

En bas för V innehåller minsta tillräckliga information som beskriver V:

* tar vi bort vektorer ur basen kan vi inte längre nå hela V, och
* lägger vi till fler vektorer till basen är de inte längre lin. ober.

Ex. $B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_2} \right\}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$, ty

$v_2 \neq c v_1 \Rightarrow$ lin. ober., och

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 2 & 4 & y_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & -2 & y_2 - 2y_1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Span}\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^2.$$

Men $\text{Span}\{v_1\} \neq \mathbb{R}^2$, så ingen bas. Och eftersom B är en bas kan vi för alla $v_3 \in \mathbb{R}^2$ skriva

$v_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ är lin. ber. $\Rightarrow$ ingen bas.

Sats 4.3.5 Låt $v_1, \ldots, v_p \in V$ (ett vektorrum) och sätt $U = \text{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$. Om v_j är en lin. komb. av de övriga vektorerna så är även

$$\text{Span}\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_p\} = U.$$

Om $U \neq \{0\}$ så är någon delmängd av $\{v_1, \ldots, v_p\}$ en bas för U.

Bevisidé: $x \in U \Rightarrow x = c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p$

$$\Rightarrow x = c_1 v_1 + \cdots + c_{j-1} v_{j-1} + c_j \underbrace{(a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_p v_p)}_{v_j} + c_{j+1} v_{j+1} + \cdots + c_p v_p$$

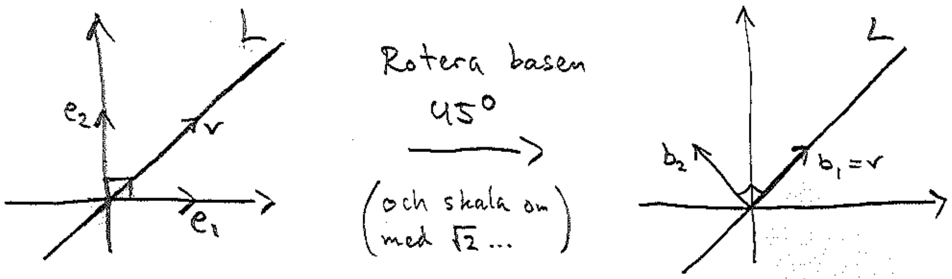
$$= (c_1 + c_j a_1) v_1 + \cdots + (c_{j-1} + c_j a_{j-1}) v_{j-1} + (c_{j+1} + c_j a_{j+1}) v_{j+1} + \cdots + (c_p + c_j a_p) v_p$$

Om $\{v_1, \ldots, v_p\}$ är lin. ber. (dvs. inte en bas), ta bort vektorer enl. ovan tills de kvarvarande är lin. ober. "$\square$"

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ kallas standardbasen för $\mathbb{R}^n$, och när vi skriver $x = (x_1, \dots, x_n)$ menar vi koordinaterna för x i denna bas.

Men vi kan använda en annan bas ifall det underlättar!

Ex. Låt $v = (1,1)$. Linjen $L = \{cv \mid c \in \mathbb{R}\}$ har standardkoordinaterna (c, c). Ta istället basen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, så har vi koordinaterna $[cv]_{\mathcal{B}} = (c, 0)$.



Ex. forts.

En bas för underrummet L ges av $\{v\}$ – här behövs bara en koordinat.

Def. Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$.

Vi kallar $P_{\mathcal{B}} = [b_1 \ \cdots \ b_n]$

koordinatbytesmatrisen.

> Vi har $x = P_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$, dvs. $P_{\mathcal{B}}$ transformerar $\mathcal{B}$-koordinater till standardkoordinater.

För att gå åt andra hållet måste vi lösa ett L.E.S.:

> Matrisen $P_{\mathcal{B}}^{-1}$ transformerar standardkoordinater till $\mathcal{B}$-koordinater.

(Varför är $P_{\mathcal{B}}$ inverterbar?)

Basbyte (i $\mathbb{R}^n$)

Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ och $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ vara två baser i $\mathbb{R}^n$. Vi vet att

$P_\mathcal{B} : [x]_\mathcal{B} \mapsto x$ och $P_\mathcal{C}^{-1} : x \mapsto [x]_\mathcal{C}$. Alltså:

$$\boxed{\text{Matrisen } P_\mathcal{C}^{-1} P_\mathcal{B} : [x]_\mathcal{B} \mapsto [x]_\mathcal{C}}$$

Vi kan hitta denna basbytesmatris genom att radreducera

$$[P_\mathcal{C} \; P_\mathcal{B}] = [c_1 \cdots c_n \mid b_1 \cdots b_n] \sim [I_n \mid P_\mathcal{C}^{-1} P_\mathcal{B}]$$

Ex.: se nästa sida, 7.4b

Om vi inte är i $\mathbb{R}^n$ utan har en bas $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ för V kan vi inte prata om $P_\mathcal{B}$ då $b_k \in V \neq \mathbb{R}^n$.

Vi kan dock fortfarande prata om $x \mapsto [x]_\mathcal{B}$, som vi kallar en koordinatavbildning.

Eftersom den avbildar V på $\mathbb{R}^n$ kan vi nu identifiera ett $x \in V$ med ett element i $\mathbb{R}^n$

Faktiskt även tvärtom:

Sats 4.4.8: Koordinatavbildningen $T : V \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto [x]_\mathcal{B}$ är linjär och inverterbar.

Bevis: Lay (övn.).

Vi kan alltså identifiera V med $\mathbb{R}^n$ så fort vi har en bas. T är en så kallad isomorfism.

$\longrightarrow$

Ex. (basbyte)

Låt $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

vara två baser för $\mathbb{R}^2$. Vi har

$$P_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$P_\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_\mathcal{C}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Basbytesmatrisen $P_\mathcal{C}^{-1} P_\mathcal{B} : [x]_\mathcal{B} \mapsto [x]_\mathcal{C}$ ges

av

$$P_\mathcal{C}^{-1} P_\mathcal{B} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Utan att ställa upp $P_\mathcal{C}^{-1}$ får vi samma svar via

$$\begin{bmatrix} P_\mathcal{C} & P_\mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & P_\mathcal{C}^{-1} P_\mathcal{B} \end{bmatrix}$$

Tag $[x]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. I standardkoordinater är

då $x = P_\mathcal{B} [x]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

C-koordinaterna ges av $[x]_\mathcal{C} = P_\mathcal{C}^{-1} x = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

eller $[x]_\mathcal{C} = P_\mathcal{C}^{-1} P_\mathcal{B} [x]_\mathcal{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ =

Notera att även $P_\mathcal{C} [x]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x$ (annars hade vi räknat fel).

Basbyte i V

Sats 4.7.15

Låt $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$ och $\mathcal{C}=\{c_1,\dots,c_n\}$ vara två baser för vektorrummet V. Då finns en unik matris $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ sådan att

$[x]_{\mathcal{C}}=\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[x]_{\mathcal{B}}$ för alla $x\in V$. Den ges av

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=\begin{bmatrix}[b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}}\end{bmatrix}.$$

Vidare är $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ inverterbar och $\left(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)^{-1}=\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.

Bevis Existens: Vi har

$$x=([x]_{\mathcal{B}})_1 b_1+\dots+([x]_{\mathcal{B}})_n b_n,$$

så eftersom $x\mapsto[x]_{\mathcal{C}}$ är linjär får vi

$$[x]_{\mathcal{C}}=([x]_{\mathcal{B}})_1[b_1]_{\mathcal{C}}+\dots+([x]_{\mathcal{B}})_n[b_n]_{\mathcal{C}}$$

$$=\begin{bmatrix}[b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}}\end{bmatrix}[x]_{\mathcal{B}}.$$

(Notera att $[b_j]_{\mathcal{C}}$ är C-koordinaterna för den j:te B-basvektorn.)

Unik: Antag att $[x]_{\mathcal{C}}=Q[x]_{\mathcal{B}}$ för alla $x\in V$, med någon annan matris Q.

Ta $x=b_1$: $[b_1]_{\mathcal{B}}=(1,0,0,\dots,0)=e_1$

$\Rightarrow [b_1]_{\mathcal{C}}=Qe_1=\mathrm{col}_1(Q)$

På samma sätt blir $[b_j]_{\mathcal{C}}=Qe_j=\mathrm{col}_j(Q)$

Dvs. $Q=\begin{bmatrix}[b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}}\end{bmatrix}=\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$. $\square$