IDAG: Dimension och rang

Mål: · Bestämma dimensionen, "storleken", av ett vektorrum

· Bestämma baser för Nul(A), Col(A) och Row(A)

Vi såg i F7 att om V har en bas $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$ så är V isomorft med ("har samma struktur som") $\mathbb{R}^n$

Därför verkar det troligt att alla baser för V har n element, annars skulle $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$ ha samma struktur.

Vi visar detta genom att applicera följande sats två gånger:

Sats 4.5.9 Låt $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$ vara en bas för vektorrummet V. Då är varje delmängd av V med fler än n element linjärt beroende. (Jämför sats 1.7.8!)

(Dvs. alla baser har max. n element.) Detta ger

Sats 4.5.10 Om V har en bas med n element så har alla baser för V precis n element.

Bevis (4.5.10): Antag att $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ är baser för V.

Eftersom $\mathcal{C}$ är lin. ober. säger Sats 4.5.9 att

$\#(\mathcal{C}) \leq \#(\mathcal{B})$. ($\#(A)$ = antal element i A)

Men $\mathcal{C}$ är en bas och $\mathcal{B}$ är lin. ober. så vi kan åberopa Sats 4.5.9 igen med ombytta roller på $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. Detta ger $\#(\mathcal{B}) \leq \#(\mathcal{C})$.

Alltså är $\#(\mathcal{C}) = \#(\mathcal{B})$. $\square$

Bevis (4.5.9) Låt $U = \{u_1, \ldots, u_p\}$ vara en delmängd av V med $p > n$ element.

Vi har visat satsen för $\mathbb{R}^n$ (Sats 1.7.8). Alltså är koordinatvektorerna $[u_1]_B, \ldots, [u_p]_B \in \mathbb{R}^n$ lin.ber.

$\Rightarrow \exists \{c_k\}_{k=1}^p \neq 0$ så att

$$0 = c_1 [u_1]_B + \cdots + c_p [u_p]_B = [c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p]_B .$$

Men detta betyder ju att $c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p = 0$! $\square$

Vi såg också i F7 att vi kan kapa bort överflödiga vektorer från $\{v_1, \ldots, v_p\}$ och få en bas för $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$ (Sats 4.3.5).

Alltså är följande definition vettig:

Def. Om V spänns upp av en ändlig mängd är V ändligdimensionellt, annars oändligdimensionellt.

I det ändliga fallet ges dimensionen av V av

$\dim V = \#(B)$, där B är en bas för V.

Om $V = \{0\}$ är $\dim V = 0$.

Ex. $\dim \mathbb{R}^n = n$ då $\{e_1, \ldots, e_n\}$ är en (ändlig) bas

Ex. $\ell^2 = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \right\}$ är ∞-dimensionellt,

ty alla vektorerna $e_j = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\text{plats } j}{1}, 0, \ldots)$

krävs för att spänna upp ℓ^2.

($\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ är en Schauder-bas för ℓ^2)

Ex. Ett plan P i $\mathbb{R}^3$ spänns upp av två vektorer så $\dim P = 2$.

En linje L kräver bara en vektor, så $\dim L = 1$.

Sats 4.5.11 Varje mängd av lin. ober. vektorer i ett underrum U av V med $\dim V < \infty$ kan utökas till en bas för U. Det gäller att $\dim U \leq \dim V$.

Bevisidé: Lägg till lin. ober. vektorer v_k tills $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\} = U$. Proceduren tar alltid slut eftersom om $p = \dim V$ så spänner vi upp V och således även U.

Bassatsen (4.5.12)

Låt V vara ett vektorrum av dimension p och låt $\mathcal{B}$ vara en mängd med $\#(\mathcal{B}) = p$. Då är $\mathcal{B}$ en bas för V om

(I) $\mathcal{B}$ är lin. ober. eller

(II) $\mathcal{B}$ spänner upp V.

Bevis: Antag (I): Utöka till en bas med $\dim V = p$ element enligt Sats 4.5.11 – dvs. utöka med inga element.

Antag (II): Reducera till en bas med $\dim V = p$ element enligt Sats 4.3.5 – dvs. ta inte bort några element. □

Speciella underrum (igen)

Låt $A = [a_1 \cdots a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och låt oss bestämma en bas för $\text{Col}(A) = \text{Span}\{a_1, \dots, a_n\}$, dvs. reducera $\{a_1, \dots, a_n\}$ till en lin. ober. mängd som spänner upp $\text{Col}(A)$.

Kom ihåg: Om $A \sim B$ så har $Ax = 0$ och $Bx = 0$ samma lösningar.

Specifikt: Om $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$ så är $x_1 b_1 + \dots + x_n b_n = 0$ med samma vikter x_k, $k = 1, \dots, n$. →

$\Rightarrow$ Det räcker att undersöka radkanoniska matriser.

Ex.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -10 & -30 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=B}$$

$\Rightarrow$ $b_3 = -2b_1 + 3b_2$ och $\{b_1, b_2\}$ lin. ober.

$\Rightarrow$ $a_3 = -2a_1 + 3a_2$ och $\{a_1, a_2\}$ lin. ober.

$\Rightarrow$ $\{a_1, a_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för Col(A).
(av dimension 2)

Generellt:

$$\boxed{\text{A:s pivotkolonner är en bas för Col(A)}}$$

Vad gäller för Nul(A)?

Ex. Med samma A, B får vi att

$$Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ så}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för Nul(A) av dimension 1.

$$\boxed{\text{En bas för Nul(A) erhålls genom att skriva lösningarna till } Ax=0 \text{ på parametrisk form}}$$

Radrummet

Vi kan även betrakta <u>radrummet</u>

$$\text{Row}(A) = \{\text{alla lin.komb. av A:s } \underline{\text{rader}}\}$$

Radreducering av A till B leder till att varje rad i B är en lin.komb. av A:s rader.

$\Rightarrow$ Om $A \sim B$ så är $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B)$

Ex. igen: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Här är $(1,0,-2)$ och $(0,1,3)$ lin.ober., så en bas för $\mathrm{Row}(A)$ ges av $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ($(0,0,0)$ till för ingenting)

Generellt:

$$\boxed{\text{Om } A \sim B \text{ så är } B\text{:s icke-noll rader en bas för } \mathrm{Row}(A).}$$

Rang

Observera att $\dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Row}(A)$ då det finns lika många icke-noll rader som pivotkolonner.

Def. Vi kallar $\dim \mathrm{Col}(A)$ rangen av A och skriver detta tal som $\mathrm{rank}(A)$.

Eftersom $\dim \mathrm{Nul}(A) = \#\{\text{fria variabler}\}$
$= \#\{\text{kolonner i } A\} - \#\{\text{pivotkolonner i } A\}$

får vi

Rangsatsen Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gäller det att

$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Row}(A)$ och

$\mathrm{rank}(A) + \dim \mathrm{Nul}(A) = n$.

Ex. En 2×100-matris A har $\operatorname{rank} A \le 2$

då $\dim \operatorname{Row}(A) \le \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Alltså måste 98 av kolonnerna vara lin. komb. av de övriga!

Ex. En 6×9-matris A kan inte ha ett 2-dimensionellt nollrum, ty då vore dess rang 7. Men $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Row}(A) = \dim \mathbb{R}^6 \le 6$.

Läs utökningen av Satsen om inverterbara matriser! Lay, s. 253.

Illustration →

"Sats 2.3.8′"