IDAG: Determinanter

Mål:
- Lära oss beräkna determinanten av en matris
- Se att detta är viktigt för area- och volym-beräkningar

Vi såg i F4 att $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är inv.

omm $\underline{ad - bc} \neq 0$.

Detta tal är determinanten av A, skrivs det A.

Vi kan få motsvarande koncept även för 3×3-matriser:

Låt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ vara inverterbar. Då kan vi radreducera A till trappstegsform och få ett pivotelement i varje rad.

Efter lite räkningar ser man (se Lay) att

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}D \end{bmatrix},$$

där
$$D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

A inv. $\Rightarrow$ $a_{11} \neq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ (efter ev. radbyten)

och $\underline{D \neq 0}$.

<u>Def.</u> $\det A = D$

Vad gör vi för större matriser?

Observera att

$$D = a_{11} \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A_{11}} - a_{12} \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A_{12}} + a_{13} \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}}_{A_{13}}$$

där A_{ij} = matrisen vi får om vi tar bort rad i och kolonn j.

Ex. Om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{1} \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ så är } A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Def. Låt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Då ges $\det A$ av

(I) a_{11} , $n=1$

(II) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $n=2$

(III) $a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$, $n \geq 2$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} .$$

OBS 1: Rekursiv definition

OBS 2: (II) är specialfall av (III)

Ex. $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ger

$$\det A = 2 \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - (-5) \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2(4-2) + 5(3-0)$$

$$= 19$$

OBS: Vi kommer ofta skriva $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ istället för $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Def. Låt $A = (a_{ij})$. Då ges (i,j)-kofaktorn av A av talet $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Dvs. $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$

Sats 3.1.1 Låt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Då är

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{för varje fixt } i \text{, och}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{för varje fixt } j.$$

Dvs. vi kan (kofaktor-)expandera $\det A$ längs en godtycklig rad i eller kolonn j.

OBS: Varannan term multipliceras med -1, som i schemat
$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$: Använd kolonn 3 (många nollor).

$$\det A = a_{13} C_{13} + a_{23} C_{23} + a_{33} C_{33}$$
$$= (+1)\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 1\cdot(-2-0) = -2.$$

Sats 3.1.2 Låt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara triangulär.

Då är $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Bevis: Antag $a_{ij} = 0$ om $i > j$ (övertriangulär).

Expandera längs kolonn 1 upprepade gånger:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} = a_{11}\left(a_{22} \det (A_{11})_{11}\right) = \cdots =$$
$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1,n-1} \det [a_{nn}]$$

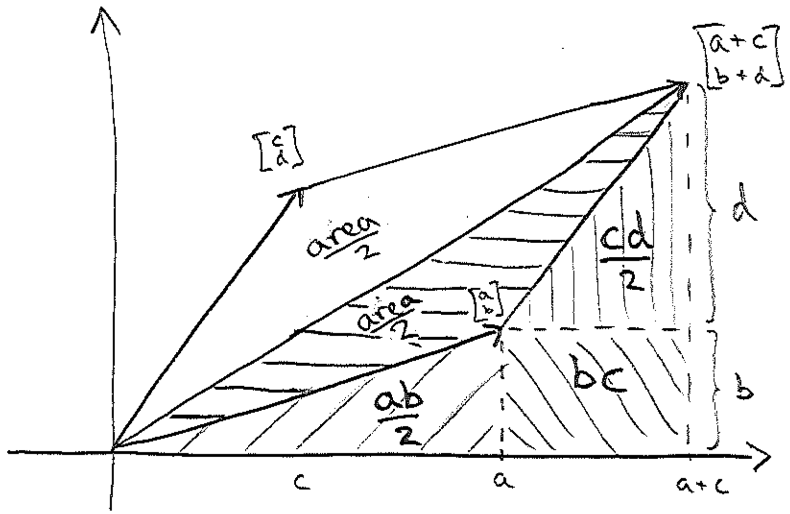
och $\det [a_{nn}] = a_{nn}$ per definition. $\square$

Geometrisk tolkning

Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Då är $\det A$ arean av det parallellogram som spänns upp av $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, alternativt av $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

$\longrightarrow$

Bevis:



$$\Rightarrow \frac{area}{2} = \frac{(a+c)(b+d)}{2} - \frac{ab}{2} - 2\frac{bc}{2} - \frac{cd}{2} = \frac{1}{2}(ad-bc)$$

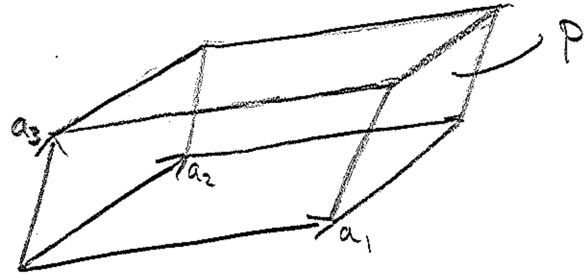
dvs. area $= ad - bc = \det A$. Samma resultat fås för $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

Lay har ett elegantare, koordinatfritt bevis men det kräver lite fler determinantegenskaper som vi tar i F10.

OBS: Stämmer även för degenererade parallellogram:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = ab - ab = 0 = \text{"arean av vektorn } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\text{"}.$$

I 3D: $\det[a_1\ a_2\ a_3]$ är volymen av en parallellpiped P, som spänns upp av $\{a_1, a_2, a_3\}$



Linjära avbildningar

Determinanten beskriver förändringen: area eller volym när vi applicerar en linjär avbildning:

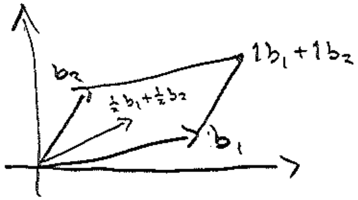
Sats 3.3.10+ Låt en lin. avb. T ha standardmatrisen A. Om $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ och $S \subset \mathbb{R}^2$ så är

$$\text{area}(T(S)) = |\det A|\, \text{area}(S).$$

Om $S \subset \mathbb{R}^3$ och $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ så gäller

$$\text{vol}(T(S)) = |\det A|\, \text{vol}(S).$$

Bevisidé: Om $S = \{ s_1 b_1 + s_2 b_2 \mid 0 \le s_1, s_2 \le 1 \}$ är ett parallellogram så ges $T(S)$ av punkterna



$$T(s_1 b_1 + s_2 b_2) = s_1 T(b_1) + s_2 T(b_2)$$
$$= s_1 A b_1 + s_2 A b_2$$

dvs. $T(S)$ spänns upp av kolonnerna i

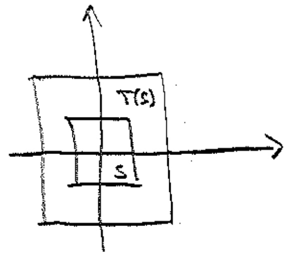
$$[Ab_1 \;\; Ab_2] = AB \quad \text{om } B = [b_1 \;\; b_2].$$

$$\Rightarrow \text{area}(T(S)) = |\det AB| \underset{F10}{=} |\det A|\,|\det B|$$
$$= |\det A| \cdot \text{area}(S)$$

För ett allmänt område S, approximera med små parallellogram, ta gränsvärde. "□"

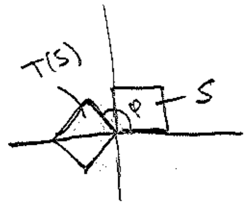
Ex.

Skalning: $x \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$



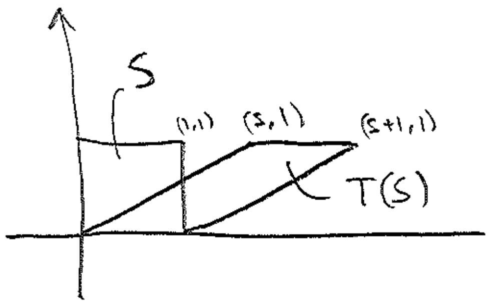
$$\Rightarrow \text{area}(T(S)) = 4\, \text{area}(S)$$

Rotation: $x \mapsto \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} x$



$$\Rightarrow \text{area}(T(S)) = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, \text{area}(S)$$
$$= \text{area}(S)\ !$$

Skjuvning: $x \mapsto \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$



$\Rightarrow \text{area}(T(S)) = (1 - 0\cdot s)\,\text{area}(S)$

$= \text{area}(S)$!

Ex. I flervariabelanalys kommer ni göra variabelbyten i dubbel- och trippel-integraler

I en variabel har vi t.ex.

$$\int_0^1 (2x-1)^2\,dx = \left| \begin{matrix} y = 2x-1 \\ x = \frac{y+1}{2} \end{matrix} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \right| = \int_{-1}^{1} y^2 \cdot \frac{1}{2}\,dy.$$

I 2D kan vi t.ex. istället vilja beräkna

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} x^2+y^2\,dx\,dy$$

: Detta betyder att vi först integrerar med avseende på x och sen m.a.p. y, för de x och y som uppfyller $x^2+y^2 \leq 1$

Vi kan göra variabelbytet

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & r^2 = x^2+y^2 \\ y = r\sin\varphi, & \varphi = \arctan(y/x) \end{cases}$$

(Ej linjär transformation!)

Då får vi att $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot D\,d\varphi\,dr$$

där $D = \det \begin{bmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\varphi} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

så $I = \int_0^1 r^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = \int_0^1 2\pi r^3\,dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$