Låt $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $u = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$. Avgör om u tillhör underrummet av $\mathbb{R}^4$ som genereras av $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Detta är en gammal fråga i nya ord. Underrummet som nämns är precis Span$\{v_1, v_2, v_3\}$, dvs. det linjära höljet av v_1, v_2, v_3. Så frågan är: är u en lin. komb. av v_1, v_2, v_3? Finns x_1, x_2, x_3 så att $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = u$? Vi skriver detta som $\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}}_{A} x = u$ och radreducerar totalmatrisen:

$$[A \; u] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -4 \\ -2 & -7 & -8 & 10 \\ 4 & 9 & 6 & -7 \\ 3 & 7 & 5 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & 9 \\ 0 & -5 & -10 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right]$$

, så det finns ingen lösning.

SVAR: Nej, u tillhör inte underrummet.

Låt mängden $W = \left\{ \begin{bmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \\ b \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$. Hitta en mängd S av vektorer som spänner upp W, eller visa att W inte är ett vektorrum.

Eftersom $a=b=c=0$ ger vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ så är $0 \in W$. Och om $u_1 = \begin{bmatrix} a_1-b_1 \\ b_1-c_1 \\ c_1-a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \in W$, $u_2 = \begin{bmatrix} a_2-b_2 \\ b_2-c_2 \\ c_2-a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \in W$

så är ju $u_1+u_2 = \begin{bmatrix} (a_1+a_2)-(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2)-(c_1+c_2) \\ (c_1+c_2)-(a_1+a_2) \\ b_1+b_2 \end{bmatrix} \in W$ (med $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$, $c=c_1+c_2$.). Likaså är $du \in W$ om $d \in \mathbb{R}$, $u \in W$.

Så W är ett underrum av $\mathbb{R}^4$, och därmed även ett vektorrum. Vi vill skriva $W = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$

dvs. skriva varje vektor $u \in W$ som $u = x_1 v_1 + \dots + x_p v_p$ för några variabler $x_1, \dots, x_p$.

Naturliga variabler här är a, b, c, så vi testar att "frilägga" dessa:

$$u = \begin{bmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \\ b \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Alla vektorer i W kan skrivas på detta vis, så

SVAR: $S = \{v_1, v_2, v_3\}$. $(W = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\})$