KU Lv 2 2017

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$

och låt W vara mängden av alla linjärkombinationer av A:s kolonner.

a) Är b i W?

b) Visa att den tredje kolonnen av A är i W.

Lösning:

a) $W := \{ w : w = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3, \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$.

$b \in W$ om $\exists \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ s.a.

$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ~~Ett~~ LES med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 & -4 \\ 6 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right] \cdot(-3) \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right] \cdot(-8)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right]$$

Här ser vi att LES:et har en entydig lösning.

$\therefore\ b \in W$

(från wolfram-α
$x_1 = \frac{9}{7}$, $x_2 = \frac{8}{7}$, $x_3 = \frac{18}{7}$)

b) $a_3 \in W$ om $\exists\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ så

$$a_3 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$$

Ta $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

$$\Rightarrow a_3 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3$$

$$= a_3$$

V.S.B.

2. Låt $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Spänner $\{v_1, v_2, v_3\}$ upp $\mathbb{R}^3$?

Isf varför?

Om inte, vad spänner de upp?

<u>Lösning:</u>

Om $\{v_1, v_2, v_3\}$ är lin. oberoende så spänner $\{v_1, v_2, v_3\}$ upp $\mathbb{R}^3$ eftersom v_1, v_2, v_3 alla ligger i $\mathbb{R}^3$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ är lin. oberoende om $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$ endast har den triviala lösningen.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 11 & 22 & 0 \\ 0 & 11 & 22 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} \end{array} \Rightarrow x_3 \text{ är fri}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x_1 = \text{[illegible]}\, x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = \text{fri} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ De är ej linjärt oberoende

$\Rightarrow$ Spänner ej upp $\mathbb{R}^3$.

Välj $x_3 = -1$

$\Rightarrow$ $V_3 = -V_1 + 2V_2$.

$V_3 \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$

Ä v_1 & v_2 linjärt oberoende i.e., $\exists\ \alpha$ s.a. $v_1 = \alpha V_2$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 4 &= -\alpha & &\Rightarrow \alpha = -4 \\ 2 &= 5\alpha & &\Rightarrow \alpha = 2/5 \\ -1 &= 3\alpha & &\Rightarrow \alpha = -1/3 \end{aligned} \quad ⚡$$

- V_1 & V_2 linjärt oberoende
- $V_3 \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$

$\Rightarrow$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ spänner upp ett plan.

(3.) Skriv lösningarna till systemet $Ax = b$ på parametrisk vektorform

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Lösning:

1. Ta fram allmän lösning
2. Uttryck lösningen $\bar{x}$ i enbart fria variabler.
3. Bryt ut de fria variablerna så att en $\underbrace{\text{lin. komb.}}_{\text{för } \bar{x}}$ erhålles.

1.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right] \begin{matrix} -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right] \begin{matrix} /2 \\ /4 \\ /2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

Allmän lösning

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 1x_3 \\ x_2 = -2 + x_3 \\ x_3 = \text{fri} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ &= 2 - \frac{1}{2}(-2 + x_3) - \frac{1}{2}x_3 \\ &= 2 + 1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_3 = 3 - 1x_3 \end{aligned}$$

5.

$\boxed{2}$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \cancel{1}x_3 \\ -2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \overset{\boxed{3}}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4.) För vilka värden på a är följande vektorer linjärt oberoende?

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ a \end{bmatrix}$$

Lösning: $\{v_1, v_2, v_3\}$ är linjärt oberoende om $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$ endast ha den triviala lösningen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & a & 0 \end{array}\right]$$

(2) (2)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & a-4 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} /2 \\ /-2 \\ /4 \end{matrix} \sim$$

$x_3 = x_2$

$(\frac{a}{4} - 1)x_3 = x_2$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{a}{4}-1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a}{4} - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 8$$

om LES ska vara konsistent

Om $a \neq 8$ finns ingen lösning förutom den triviala.

Svar: $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$,