/ KU LV3 2017

(1) Beräkna A^{-1} genom att radreducera $[A \mid I_3]$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Utifrån detta, vad kan sägas om utseendet av inversmatrisen till en godtycklig triangulär matris?

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \quad -6 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ /3 \\ /-2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1/2 \end{array}\right] = [I_3 \mid A^{-1}]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{= I_3} \qquad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & -1/2 \end{matrix}}_{= A^{-1}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

· Utseende hos A^{-1} då A godtycklig triangulär matris

- A^{-1} samma slags triangulära matris
- A^{-1}:s diagonalelement är inversen av A:s motsvarande diagonalelement.

(2) En egenvektor x till A uppfyller $x \neq 0$ och $Ax = \lambda x$ för λ konst.

λ egenvärde.

Hitta en egenvektor x till $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ där $\lambda = 2$ genom $(A - \lambda I_3)x = 0$.

<u>Lösning:</u>

$$0 = (A - 2 \cdot I_3)x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] -3/2 \qquad \left(\frac{2}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 0 \quad x_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ x_1 fri $x_2 = x_3 = 0$.

$$x = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

③ Beräkna A^{-1} då

$$A = \begin{bmatrix} I_3 & -I_3 \\ I_3 & I_3 \end{bmatrix}$$

Lösning. ($[A \mid I_n]$ -algoritmen) (Låt $I = I_3$)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & -I & I & 0 \\ I & I & 0 & I \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} I & -I & I & 0 \\ 0 & 2I & -I & I \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1/2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} I & 0 & \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \\ 0 & 2I & -I & I \end{array}\right] /2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} I & 0 & \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \\ 0 & I & -\frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} I & 0 \\ 0 & I \end{matrix}}_{= I_6} \qquad \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \\ -\frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \end{matrix}}_{= A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alt. lösning

$$A = \begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} \quad ?$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(I) \cdot \det(I) - \det(I) \det(-I) \\ &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot -1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}$$

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Finns det någon ~~[illegible]~~ vektor förutom nollvektorn som både ligger i $Col(A)$ & $Nul(A)$?

<u>Lösning.</u>

$Col(A) = \{ y \in \mathbb{R}^3 : y = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^n \}$

$Nul(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 ; Ax = 0 \}$

Beräkna och se.

~~[illegible]~~ <u>$Nul(A)$</u>

En bas till $Nul(A)$ fås från vektorerna ~~[illegible] den de~~ som finns med i den parametriserade vektorformen av lösn. till $Ax = 0$.

från KU3 Uv2

$Ax = b \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

från teori

$\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Nul(A) = Span \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Col(A)

En bas ges av A:s kolumner som blir pivotkolumner efter en radreducering.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} -3 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} -2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivotkolumner.

$$\Rightarrow \mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\exists\, v \in \mathrm{Col}(A)$ & $\mathrm{Nul}(A)$?

Alltså: finns det $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ s.a.

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ?}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3 \\ \leftarrow \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \leftarrow \\ -2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{-2/-2}{1} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \leftarrow \\ -1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Den enda lösningen är nollvektorn

$\therefore \nexists$ någon vektor förutom nollvektorn som ligger både i $Col(A)$ & $Nul(A)$.