KU LV4 2017

(1) Bestäm en bas för Col(A) då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array}$$

Lösning:

En bas till Col(A) ges av As pivotkolonner.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 5 \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ a_1 & a_2 är As pivotkolonner

En bas är $\{a_1, a_2\}$

(2.) De två planen U_1 och U_2 i $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationerna

$$2x - 3y + z = 0,$$
$$x + 4y - z = 3.$$

a) Vilket om något av dessa plan är ett underrum av $\mathbb{R}^3$?

b) Ange dim & bas till ett sådant

c) Varför är de övriga ej underrum?

<u>Lösning:</u>

<u>Def</u> (Underrum)

Ett underrum till ett vektorrum V är en delmängd $H \subset V$ s.a.

i) $0_V \in H$

ii) för $u, v \in H$ så $u + v \in H$ (sluten v-addition)

iii) för $u \in H$ & $c \in \mathbb{R}$ så $cu \in H$.
(sluten skalär multiplikation)

$\cancel{U_1 = \{ x_1, x}$

a) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0\}$

$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y - z = 3\}$

i) $(0,0,0) \in U_1$, eftersom $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 = 0$

men $(0,0,0) \notin U_2$, eftersom $0 \neq 3$.

U_2 ej underrum för att $0_{\mathbb{R}^3} \notin U_2$.

ii) För $u, v \in U_1$, är $u + v \in U_1$?

$u + v = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in \mathbb{R}^3$

Är planets ekvation uppfylld?

$2(u_1 + v_1) - 3(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3)$

$= (\underbrace{2u_1 - 3u_2 + u_3}_{=0,\ \text{ty } u \in U_1}) + (\underbrace{2v_1 - 3v_2 + v_3}_{=0,\ \text{ty } v \in U_1})$

$= 0$ Ok.

iii) För $u \in U_1$, $c \in \mathbb{R}$, är $cu \in U_1$?

$cu = (cu_1, cu_2, cu_3)$

Är planets ekvation uppfylld?

$2cu_1 - 3cu_2 + cu_3$

$= c(\underbrace{2u_1 - 3u_2 + u_3}_{=0,\ \text{ty } u \in U_1}) = 0$ ok.

$\therefore$ U_1 är ett ~~...~~ underrum av $\mathbb{R}^3$ men U_2 är inte det för att $(0,0,0) \notin U_2$.

$\uparrow$ nollvektorn i $\mathbb{R}^3$.

- Bas och dim till U_2

för alla $\bar{x} \in U_1$ har vi

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= y \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bas till U_1 eftersom de är lin. oberoende och höljet av den $= U_1$.

~~...~~ $\dim U_1 = \#$ basvektorer $= 2$.

4.

(3.) Låt $A \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$.

a) Givet ett b, kan vi garantera att systemet $Ax = b$ är lösbart?

b) Kan vi garantera att det inte är lösbart?

c) Ange största/minsta möjlig. värden på dim Col(A) & dim Nul(A). ~~Motiv.~~ Motivera svaren

Lösning:

a) Nej, även om $b \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ kan systemet ~~kan~~ vara inkonsistent.

~~Om~~ 6 ekvationer 4 okända

~~Om några ekvationer är~~

- Några ekvationer dubbletter $\to$ kanske har lösn.
- Om två ekvationer motsäga varandra $\Longrightarrow$ ej lösbart.

b) Ja om $b \notin \mathbb{R}^{6 \times 1}$ eller om $A = 0$ och $b \neq 0$.

c) dim Col A = # basvariabler/pivotkolumner
dim Nul A = # fria variabler

$\begin{pmatrix} 0, \text{ om} \\ A = 0 \end{pmatrix}$ $1 \leq \dim \operatorname{Col} A \leq 4$

$0 \leq \dim \operatorname{Nul} A \leq 3$ $\left(4 \text{ om } A = 0\right)$

Eftersom en nollskild matris alltid har minst en pivotkol.
$\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = n = 4$ (Rank theorem)

(9.) Låt $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

vara två baser för $\mathbb{R}^2$.
Bestäm basbytesmatriserna

$\underset{C \leftarrow B}{P}$ & $\underset{B \leftarrow C}{P}$.

Lösning:
$x \in \mathbb{R}^2$ kan uttryckas som

$[x]_B$ eller $[x]_C$

Vill bestäm $\underset{C \leftarrow B}{P}$ / $\underset{B \leftarrow C}{P}$ alltså

(i) $[x]_C = \underset{C \leftarrow B}{P} [x]_B$ &

(ii) $[x]_B = \underset{B \leftarrow C}{P} [x]_C$

Notera att om $\underset{C \leftarrow B}{P}$ inverterbar så:

$$\left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} [x]_C = \left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} \underset{C \leftarrow B}{P} [x]_B$$

$$[x]_B = \boxed{\begin{matrix} \left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} \\ \| \\ \underset{B \leftarrow C}{P} \end{matrix}} [x]_C$$

Egen lösning

$$x = \alpha b_1 + \beta b_2 = \gamma c_1 + \delta c_2$$

$$\Leftrightarrow [b_1, b_2]\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = [c_1, c_2]\begin{bmatrix}\gamma \\ \delta\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [b_1, b_2][x]_B = [c_1, c_2][x]_C$$

$$\Rightarrow [x]_C = \underbrace{[c_1, c_2]^{-1}[b_1, b_2]}_{= \underset{C \leftarrow B}{P}}[x]_B$$

$$[c_1, c_2]^{-1} = \left(\begin{bmatrix}2 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1} = -\frac{1}{1}\begin{bmatrix}0 & -1 \\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\underset{C \leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 \\ 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1 \\ -4 & -1\end{bmatrix}$$

$$\underset{B \leftarrow C}{P} = \left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix}3 & 1 \\ -4 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{-3+4}\begin{bmatrix}-1 & -1 \\ 4 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1 \\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

Bokløsning

koordinater er lineære

$$[X]_C = [\alpha b_1 + \beta b_2]_C = \alpha[b_1]_C + \beta[b_2]_C$$

$$= \left[[b_1]_C, [b_2]_C\right] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\left[[b_1]_C, [b_2]_C\right]}_{= \underset{C \leftarrow B}{P}} [X]_B$$

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 = b_1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[c_1, c_2]}_{P_C} \underbrace{[b_1]_C}_{= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = b_1$$

$$[c_1, c_2] \underbrace{[b_2]_C}_{= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} = b_2$$

$$\Rightarrow [c_1, c_2] \cdot \left[[b_1]_C, [b_2]_C\right] = [b_1, b_2]$$

$$\Rightarrow [c_1, c_2 \mid b_1, b_2]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \underset{-2}{} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \underset{C \leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\qquad\qquad [b_1]_C \qquad [b_2]_C$$

Samme som på foregående side.