KU LVG 2017

1. För $\mathbb{X}'(t) = A\,\mathbb{X}(t)$, där

$\mathbb{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$ bestäm alla

lösningar $\mathbb{X}(t)$.

<u>Lösning:</u>

En lösning ges av

$\mathbb{X}(t) = \mathbb{X}(0)\cdot e^{tA}$, där

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k$$ och

om A är diagonaliserbar

$e^{tA} = PBP^{-1}$.

A diagonaliserbar om

Tot alg. mult. = Tot geom. mult.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

n olika egenvärden $\Rightarrow$ T.A.M = T.G.M

$\Rightarrow$ A diagonaliserbar!

Behöver egenvektorerna

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$$(A - 1 \cdot I)x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow x_2 = x_3 = 0 \qquad x_1$ fri

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$

$$(A - 2 \cdot I)x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_2 \\ x_2 = \text{fri} \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_3 = 3}$

$$(A - 3\cdot I)x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot 1/2 \quad 2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7x_3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad -3 \quad -7$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -4 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Pc = x_0$$

$$x(t) = P B P^{-1} x(0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix}}_{=c}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & 4e^{2t} & 7e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & 3e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}}_{PB} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=v_1} + c_2 e^{2t} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=v_2} + c_3 e^{3t} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=v_3}$$

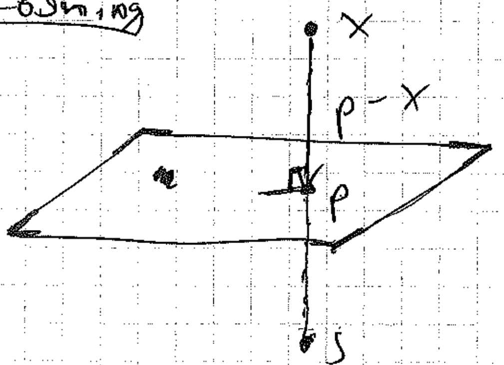
2. Låt en bas för planet $U \subset \mathbb{R}^3$ ges av vektorerna

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm speglingen av punkten

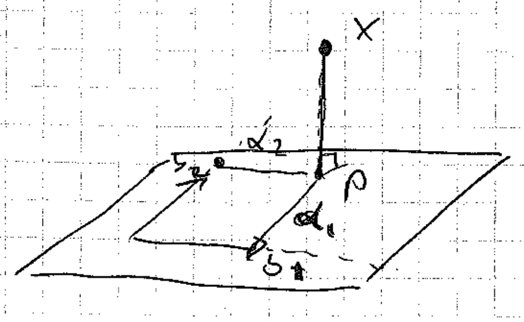
$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

<u>Lösning</u>



$$s = x + 2(p-x)$$

Behöver projektionen p av x på U.



$$p = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$$

Notera att: $b_1 \cdot b_2 = 0 \Rightarrow b_1 \perp b_2$

$(p-x) \perp u, \ \forall u \in U$

$\Rightarrow (p-x) \cdot b_i = 0, \ i \in \{1,2\}$

$$0 = (p - x)\cdot b_1 = (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 - x)\cdot b_1$$

$$= \alpha_1 b_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \underbrace{b_2 \cdot b_1}_{=0} - x \cdot b_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{x \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} \quad \text{p.s.s.} \quad \alpha_2 = \frac{x \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{11}{6} \qquad x \cdot b_1 = [1, 2, 4]\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = 11$$

$$b_1 \cdot b_1 = [1\ 1\ 2]\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = 6$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad x \cdot b_2 = [1\ 2\ 4]\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} = 1$$

$$b_2 \cdot b_2 \quad [-1\ -1\ 1]\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} = 3$$

$$p - x = \frac{11}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} - \frac{6}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}11 & -2 & -6\\ 11 & -2 & -12\\ 22 & +2 & -24\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}3\\-3\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$s = x + 2(p - x) = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & + & 1\\ 2 & + & -1\\ 4 & + & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$$

③ Bestäm en ortonormal bas för det plan i $\mathbb{R}^4$ som ges av $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$.

Lösning

$X \in \mathbb{R}^4 \cap$ planet :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - 2x_3 + 4x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_2} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_3}$$

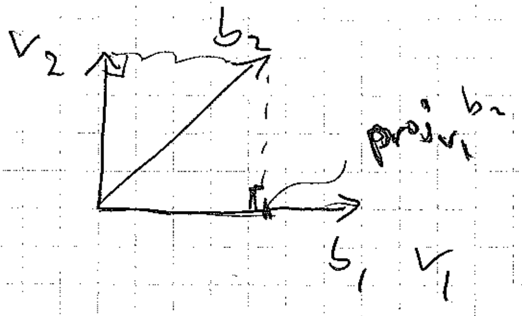
$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ bas för planet. Men ej en ON-bas. ~~ty~~ t.ex.

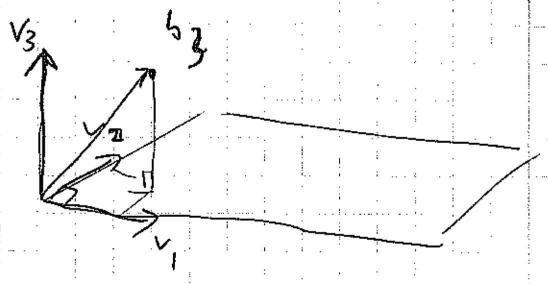
$b_1 \cdot b_2 = -2 \neq 0$

$b_1 \cdot b_1 = 2 \neq 1$

i) Använd Gram-Schmidt.

ii) Normera den ortogonala basen.





$$v_1 = b_1$$

$$v_2 = b_2 - \frac{b_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = b_2 - \text{proj}_{\text{span}\{v_1\}} b_2$$

$$v_3 = b_3 - \frac{b_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{b_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$

$$v_k = b_k - \text{proj}_{\text{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}} b_k$$

1/ $\underline{v_1}$

$$v_1 = b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{v_2}$

$$v_2 = b_2 - \frac{b_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{v_3}$

$$v_3 = b_3 - \frac{b_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{b_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-4}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{3}\begin{bmatrix}4\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix}-4\\4\\4\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}12 - 6 - 4\\0 - 6 + 4\\0 - 0 + 4\\3 - 0 + 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\4\\3\end{bmatrix}$$

En ortogonal bas är $\{V_1, V_2, V_3\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2/3\\-2/3\\4/3\\1\end{bmatrix} \right\}$$

Kontroll:

$V_1 \cdot V_2 = -1 + 1 = 0$, $V_1 \cdot V_3 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$

$V_2 \cdot V_3 = -2/3 - 2/3 + 4/3 = (-4+4)/3 = 0$

Ok :)

ii) Normera. $u_i = \frac{1}{|V_i|} V_i$

$\Rightarrow u_i \cdot u_i = \frac{V_i \cdot V_i}{|V_i|^2} = \frac{|V_i|^2}{|V_i|^2} = 1$

$u_i \cdot u_j = \frac{1}{|V_i|} V_i \cdot \frac{1}{|V_j|} V_j = \frac{1}{|V_i||V_j|} V_i \cdot V_j = 0$ ok.

$\underline{u_1}$

$u_1 = \frac{1}{|V_1|} \cdot V_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2 \dots}} \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\underline{u_2}$

$$u_2 = \frac{1}{((-1)^2+(1)^2+(1)^2)^{1/2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\end{bmatrix}$$

$\underline{u_3}$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+(1)^2}}\begin{bmatrix}2/3\\-2/3\\4/3\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}+\frac{9}{9}\right)^{1/2}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\\4\\3\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{9}}\,3}{\sqrt{33}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\begin{bmatrix}2\\-2\\4\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{33}}\begin{bmatrix}2\\-2\\4\\3\end{bmatrix}$$

En ON-bas till planet är

$$\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2/\sqrt{33}\\-2/\sqrt{33}\\4/\sqrt{33}\\3/\sqrt{33}\end{bmatrix}\right\}$$

4. Låt n vektorer $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ vara givna. Gramianen M är

$$M = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1, & v_1 \cdot v_2, & \cdots, & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1, & v_2 \cdot v_2, & \cdots & v_2 \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ v_n \cdot v_1, & v_n \cdot v_2, & \cdots & v_n \cdot v_n \end{bmatrix}$$

a) Visa i fallet $n = 2$ att v_1 och v_2 är lin. ~~o~~beroende o.m.m. $\det(M) = 0$.

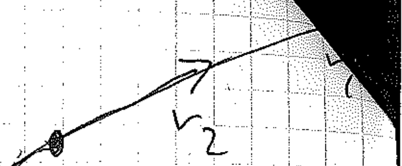
b) Resultatet från a) gäller även för $n > 2$. Använd detta för att undersöka ifall vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ är lin. oberoende.

<u>Lösning</u>

$n = 2$, $M = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1, & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1, & v_2 \cdot v_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$: Anta att v_1 & v_2 är linjärt beroende.

v_1, v_2 lin. ber.



• $\mathrm{proj}_{v_2} v_1 = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = v_1$

v_1, v_2 lin. bér.

• $\mathrm{proj}_{v_1} v_2 = \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = v_2$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \frac{v_1 \cdot v_1}{v_2 \cdot v_1} v_2$$

$$\Rightarrow \frac{v_1 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} = \frac{v_1 \cdot v_1}{v_2 \cdot v_1} \Leftrightarrow (v_1 \cdot v_2)(v_2 \cdot v_1) = (v_1 \cdot v_1)(v_2 \cdot v_2)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(v_1 \cdot v_1)(v_2 \cdot v_2) - (v_1 \cdot v_2)(v_2 \cdot v_1)}_{= \det(M)} = 0$$

$\Rightarrow$: ok.

$\Leftarrow$: Anta att $\det(M) = 0$

$$\cancel{\Leftrightarrow \bullet \ \frac{v_1 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \frac{v_1 \cdot v_1}{v_2 \cdot v_1} v_2}$$

$$\cancel{= \mathrm{proj}_{v_2} v_1}$$

$$\cancel{\bullet \ \underbrace{\frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1}_{\mathrm{proj}_{v_1} v_2} = \frac{v_2 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_2} v_1}$$

$\det(M) = 0$

$\Leftrightarrow (v_1 \cdot v_2)^2 = (v_1 \cdot v_1)(v_2 \cdot v_2) = |v_1|^2 |v_2|^2$

$(v_1 \cdot v_2)^2 = (|v_1||v_2|)^2$

$\Leftrightarrow v_1 \cdot v_2 = \pm |v_1||v_2|$ $\left(\begin{array}{c} \text{def.} \\ v_1 \cdot v_2 = |v_1||v_2| \cos\theta \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = \underset{+2\pi n}{0}$ eller π

$\Leftrightarrow v_1 = \alpha v_2$, för något $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\Leftarrow$: ok. (~~[illegible]~~ fungerar också för $\Rightarrow$.)

V.S.B.

b) Låt $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1+4+9 & 1+2-3 & 2-6+15 \\ \cdot & 1+1+1 & 2-3-5 \\ \cdot & \cdot & 4+9+25 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 14 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & -6 \\ 11 & -6 & 38 \end{bmatrix}$

$\det M = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & -6 \\ 11 & -6 & 38 \end{vmatrix}$

$$= 14\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 38 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 11 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 14(114 - 36) + 11(-33)$$

$$= (10+4)\cdot 78 - (10+1)33 = 780 + 312 - 363 = 792 - 63 = 789 - 60 = 729$$

$$\cancel{= 1500 + 600 - 330 - 33 = 2100 - 363 = 2000 - 263 = 1800 - 63 = 1740 - 3 = 1736 \neq 0} = 729 \neq 0$$

$\det M \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ är linjärt oberoende.