KU LV7, del 1 2017

1. Skriv den kvadratiska formen

$Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3)$

$= 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$

på matrisform.
Bestäm sedan en annan ekvivalent kvadratisk form $R(y)$ utan blandtermer, genom diagonalisering av matrisen.
(Del svar i: beräkna egenvektorerna och ange $R(y)$ i de nya koord.)

Kan du säga något om vilka värden Q antar?

Lösning:

Matrisform är $\overbrace{x^T A x}^{Q(x)}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

med en symmetrisk matris A.

$$Ax = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_1 + b x_2 + c x_3 \\ d x_1 + e x_2 + f x_3 \\ g x_1 + h x_2 + i x_3 \end{bmatrix}$$

$$x^T A x = a x_1^2 + b x_2 x_1 + c x_3 x_1$$
$$+ d x_1 x_2 + e x_2^2 + f x_3 x_2$$
$$+ g x_1 x_3 + h x_2 x_3 + i x_3^2$$

1.

Rene termer (x_i^2) $\Rightarrow$ diagonalelementen a_{ii}

Blandtermer $(x_i x_j)$ $\Rightarrow$ a_{ij} och a_{ji}

A sym.

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ ger } Q(x) = x^T A x$$

<u>Kontroll</u>: $x^T A x = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$

$$= 4x_1^2 + \underline{x_1 x_2}$$
$$+ \underline{x_1 x_2} + 3x_2 x_2 + x_3 x_2$$
$$+ x_2 x_3 + 4x_3^2$$
$$= 4x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 + 2x_2 x_3 + 4x_3^2$$
$$= Q(x) \quad \text{ok.}$$

Lpl $A = PDP^{-1}$, A symmetrisk

$= PDP^T$ $\Rightarrow P^{-1} = P^T$

om normerade kolonner

$$\Rightarrow x^T A x = \underbrace{x^T P}_{=y^T} D \underbrace{P^T x}_{=y}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Lpl } y = P^T x \\ y^T = (P^T x)^T = x^T P^{T^T} = x^T P \end{bmatrix}$$

$$= y^T D y = R(y)$$

Beräkn A:s egenvärden

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 0\cdot|\ldots|$$

$$= (4-\lambda)\big((3-\lambda)(4-\lambda)-1\big) - (4-\lambda)$$

$$= (4-\lambda)\big((3-\lambda)(4-\lambda)-2\big)$$

$$= (4-\lambda)(12-3\lambda-4\lambda+\lambda^2-2)$$

$$= (4-\lambda)(\underbrace{\lambda^2-7\lambda+10}_{=0})$$

$\lambda = 4$

$$\hookrightarrow \lambda = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{7^2}{2^2} - \frac{10\cdot 4}{4}}$$

$$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-40}{4}}$$

$$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7 \pm 3}{2} = 5, 2$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 5$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R(y) = y^T D y = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{2y_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{4y_2^2}_{\geq 0} + \underbrace{5y_3^2}_{\geq 0}$$

Q antar bara icke-negativa värden.

2. Värdena (x_k, y_k) i tabellen har uppmätts i ett experiment. Hypotes säger att $y = Cx^3 + D$.

Bestäm minsta-kvadrat-uppskattningen av C o D givet dessa

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	-8	0	-1	0	9

<u>Lösning</u>

Vi får LES:et $\left(Cx_k^3 + D = y_k \atop k = 1, \ldots, 5 \right)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}}_{\bar{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}}_{Y}$$

$\Rightarrow$ Normalekvationerna

$$X^T X \bar{\beta} = X^T Y$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 64 + 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X^T y = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 + 72 \\ -9 + 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 136 \\ 0 \end{bmatrix}$$

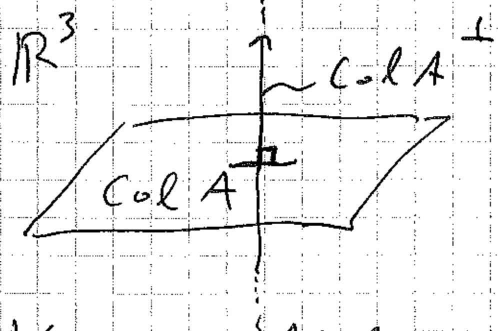
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 130 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C = 136/130 \\ D = 0 \end{matrix}$$

(3.) Bestäm en bas för $\text{Col}\,A^{\perp}$

då $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösning:

För $x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow Ax \in \mathbb{R}^3$



$\forall x \in \text{Nul}\,A \Leftrightarrow Ax = 0$

$\Leftrightarrow x \perp$ mot $\underbrace{\text{alla rader i } A}_{\text{row}\,A}$

$\Rightarrow \text{Nul}\,A \perp \text{row}\,A$ och

$\text{Nul}\,A = \text{row}\,A^{\perp}$

$\Rightarrow \text{Nul}\,A^T = (\text{row}\,A^T)^{\perp} = (\text{Col}\,A)^{\perp}$

Om $x \in \text{Nul}\,A$
$\Rightarrow x \in \text{Row}\,A^{\perp}$
$\Rightarrow \text{Nul}\,A \subseteq \text{Row}\,A^{\perp}$
Om $x \in (\text{Row}\,A)^{\perp}$
$\Rightarrow x \in \text{Nul}\,A$
$\Rightarrow \text{Row}\,A^{\perp} \subseteq \text{Nul}\,A$
$\Rightarrow \text{Nul}\,A = \text{Row}\,A^{\perp}$

Bestäm en bas till $\text{Nul}\,A^T$

$A^T x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ (-2)

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right]$ (-1) (-1) $\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = \text{fri} \\ x_3 = -7x_2 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -7x_2 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}}_{\text{bas}}$$

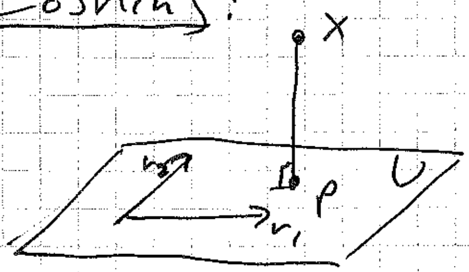
En bas till $\text{Col}\, A^{\perp}$ är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. Låt en bas för planet $U \subset \mathbb{R}^3$ ges av $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Bestäm den ortogonala projektionen på U av $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Lösning:



Är $v_1 \perp v_2$? $v_1 \cdot v_2 = (1\ 2\ 1) = 6 \neq 0$

Ta fram en ortogonalbas med G-S.

$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

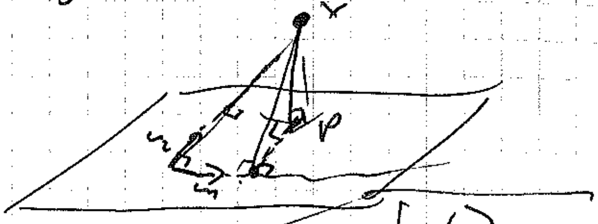
$u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1} v_2$

$= v_2 - \dfrac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$u_1 \cdot u_2 = -1 + 1 = 0$ ok.

$\{u_1, u_2\}$ är en ortogonalbas till U.



$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p = \alpha u_1 + \beta u_2$$

$$= \operatorname{proj}_{u_1} x \; u_1 + \operatorname{proj}_{u_2} x \; u_2$$

$$= \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{x \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

$$= \frac{6}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & +0 \\ 2 & +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$p = \operatorname{proj}_U x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$