KU LV7, del 2 2017

(1.) Bestäm baser för Col A o Nul A

då $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Lösning:

Bas för Col A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -5 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} /2 \\ \\ /-5 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow \;\; \uparrow \\ \text{pivot} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Bas för Col A $= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Bas för Nul A

$$Ax = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7x_3 \\ x_2 = -4x_3 \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_3 \\ -4x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Bas för Nul } A = \left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Let $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\} = \left\{\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}\right\}$

vara en bas för planet $U \subset \mathbb{R}^3$.

Bestäm $\mathcal{B}$-koord för $x = \begin{bmatrix}10\\18\\11\end{bmatrix}$

i planet. Ange även ~~standardko~~ standardkoordinaterna för $y \in \mathbb{R}^3$ om $[y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

Lösning:

$$x = \tilde{x}_1 b_1 + \tilde{x}_2 b_2 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$[b_1, b_2] \underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{bmatrix}}_{[x]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}_{x}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}0 & 2 & 10\\1 & 4 & 18\\2 & 3 & 11\end{array}\right] \begin{matrix}-2\\+\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 5\\1 & 0 & -2\\0 & -5 & \underbrace{11-36}_{=-25}\end{array}\right] \begin{matrix}/2\\ \\ /-5\end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 5\\1 & 0 & -2\\0 & 1 & 5\end{array}\right] \Rightarrow [x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\tilde{y}_1 b_1 + \tilde{y}_2 b_2}_{\left(= [b_1, b_2][y]_B \right)}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 2 \\ 2 + 4 \\ 4 + 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(3.) Låt $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ och

$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Bestäm $\det(A^{-2}B^{13})$

<u>Lösning</u>

$$\left(A^{-1}A = I \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1} \right)$$

$$\det(A^{-2} \cdot B^{13}) = \det(A)^{-2} \cdot \det(B)^{13}$$

• $\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-8-4) = -1 \cdot -12$$
$$= 12$$

• $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-4) \\ \downarrow & \\ & \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \det B = 0$

~~Svar~~ $\det(A^{-2}B^{13}) = 0$

S.

4. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ om möjligt eller ange varför det inte gör.

Lösning:

Beräkna egenvärden och egenvektorer och jämför algebraisk multi. med geometrisk multiplicitet. (Om lika ⇒ A diagonaliserb.)

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ har ~~mu~~ algebraisk multiplicitet 3.

Beräkna egenvektor/(egenrummet och dess dim)

$$(A - 1 \cdot I)x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 \text{ fri} \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ fri} \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Två basvektorer till egenrummet

Egenrummet har dim 2.

Alg. mult. = 3

Geom. mult. = 2

$3 \neq 2$

$\Rightarrow$ A <u>ej</u> diagonaliserbar.