TMV166 Linjär algebra för M, vt 2017
Kryssuppgifter läsvecka 6

1. Låt ett system av differentialekvationer ges av

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{med} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Bestäm alla lösningar $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

2. Låt en bas för planet $U \subset \mathbb{R}^3$ ges av vektorerna $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm speglingen av punkten $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. (Se t.ex. datorlaboration 4 för definition av spegling.)

3. Bestäm en ortonormal bas för det plan i $\mathbb{R}^4$ som ges av ekvationen $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$.

4. Låt n vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i $\mathbb{R}^n$ vara givna. Då ges *Gramianen* eller *Gram-matrisen* (eng. *Gram(ian) matrix*) M av

$$M = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ v_n \cdot v_1 & \cdots & & v_n \cdot v_n \end{bmatrix}.$$

   Den är även känd som *mass-matrisen* inom finita element-metoden.

   (a) Visa i fallet $n = 2$ att v_1 och v_2 är linjärt beroende om och endast om $\det(M) = 0$.

   (b) Resultatet i (a) gäller även för $n > 2$. Använd detta för att undersöka ifall vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ är linjärt oberoende.

   (Metoden i (b) rekommenderas inte allmänt för liknande frågor.)