MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Tony Stillfjord
Telefonvakt: Tony Stillfjord, tel. xxx

TMV166 2017
2017-03-01 kl. xxxx (här)
Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom presentation av kryssuppgifter. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårlästa lösningar.

Lycka till!

Tony

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Ange hur många lösningar följande ekvationssystem har: (3p)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 1x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Om det finns precis en lösning, ange även denna.

2. Låt $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ d \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. För vilka reella tal d ligger x i det plan som spänns upp av u och v? (3p)

3. Bestäm en ortonormal bas för planet i föregående uppgift. (3p)

4. En parallellpiped P har de fyra närliggande hörnen origo, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (3p)
Bestäm volymen av P.

5. Ange den ortogonala projektionen av $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ på linjen som spänns upp av $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$. (3p)

6. Bestäm den karakteristiska ekvationen för matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ och ange dess egenvärden. (3p)

7. Matrisen A har en diagonalisering som ges av (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm $A^{17}b$ för $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

8. Är den kvadratiska formen $4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$ positivt (semi-)definit, negativt (semi-)definit eller indefinit? (3p)

9. Låt en bas $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ för $\mathbb{R}^3$ ges av $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $b_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$. Ange B-koordinaterna för vektorn $u = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 7 \end{bmatrix}^T$ och standardkoordinaterna för vektorn v med B-koordinaterna $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. (3p)

10. Med basen B från föregående uppgift, finns det en icke-trivial vektor vars B-koordinater är detsamma som dess standardkoordinater? Vad skulle en sådan vektor i så fall kallas? (3p)

11. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ har två egenvärden $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 4$. Diagonalisera A om möjligt, eller ange varför det inte går. (5p)

12. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en avbildning som ges av $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + sx_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$ för en konstant s. (5p)

(a) Visa att T är en linjär avbildning. (2p)

(b) Härled standardmatrisen för T. (1p)

(c) Avgör om T är injektiv och/eller surjektiv. (2p)

13. Antag att vi vet att ett *homogent* linjärt ekvationssystem med 7 ekvationer och 10 variabler har precis 5 stycken icke-triviala, linjärt oberoende lösningar. (5p)

(a) Kan vi alltid lösa det motsvarande icke-homogena ekvationssystemet? Motivera. (2p)

(b) Formulera satsen du använde för att lösa a) och definiera de två huvudsakliga koncepten den innehåller. (3p)

14. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (5p)

(a) Visa att $Ax = b$ är inkonsistent. (1p)

(b) Bestäm en minstakvadrat-lösning $\hat{x}$ till systemet genom att ställa upp och lösa normalekvationerna. (3p)

(c) Beräkna minstakvadrat-felet (dvs. normen av residualen). (1p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Tony Stillfjord
Telefonvakt: Tony Stillfjord, tel. xxx

TMV166 2017
2017-03-01 kl. xxxx (här)
Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	**Svar**	**Poäng**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		