TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom presentation av kryssuppgifter. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Tony

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Ange hur många lösningar följande ekvationssystem har: (3p)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 1x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Om det finns precis en lösning, ange även denna.

[Mål: (1.1) lösa linjära ekvationssystem med eliminationsmetoden]

Lösning: Radreducera totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right]$$

Alltså finns en unik lösning. Fortsätt till radkanonisk form:

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Den unika lösningen är $(x_1, x_2, x_3) = (2, -2, 1)$.

2. Låt $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ d \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. För vilka reella tal d ligger x i det plan som spänns upp av u och v? (3p)

[Mål: (1.3) avgöra om en vektor tillhör linjära höljet (span) av givna vektorer.]

Lösning: Vektorn x ligger i det efterfrågade planet om den är en linjärkombination av u och v, dvs. om $Ac = x$ med matrisen $A = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$ har en icke-trivial lösning. Radreduktion ger

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & d \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & d+2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & d-18 \end{array}\right]$$

så om det ska finnas en fri variabel måste vi ha $d = 18$.

3. Bestäm en ortonormal bas för planet i föregående uppgift. (3p)

[Mål: (6.4) tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i R^n utgåaende från en annan bas för W. *och* (6.2) förklara vad som menas med ortonormerad bas för ett underrum W]

Lösning: Vektorerna u och v är en bas för planet, så vi applicerar Gram-Schmidt och får den ortogonala basen $B = \{b_1, b_2\}$ där $b_1 = u$ och $b_2 = v - \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. En ortonormal bas ges alltså av $b_1 / \|b_1\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $b_2 / \|b_2\| = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. En parallellpiped P har de fyra närliggande hörnen origo, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (3p)

Bestäm volymen av P.

[Mål: (3.1) beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek med hjälp av sats 1]

Lösning: Volymen av P ges av absolutbeloppet determinanten av matrisen vars kolonner är de tre hörnen. Via kofaktor-expansion längs första kolonnen får vi

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) - 1 \cdot 6 = -12,$$

så $\mathrm{vol}(P) = 12$.

5. Ange den ortogonala projektionen av $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ på linjen som spänns upp av $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$. (3p)

[Mål: (6.2) använda projektionsformeln 6.2.(2) i problemlösning]

Lösning: Projektionen $\mathrm{proj}_v\, x$ ges av

$$\mathrm{proj}_v\, x = \frac{x \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{-9}{18} v = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

6. Bestäm den karakteristiska ekvationen för matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ och ange dess egenvärden. (3p)

[Mål: 5.2 förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärden.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen ges av

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\Big((1-\lambda)(4-\lambda) + 3\Big) - 3(4-\lambda) + 6$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda).$$

Egenvärdena är alltså 1, 2 och 4.

7. Matrisen A har en diagonalisering som ges av (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm $A^{17} b$ för $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

[Mål: (5.3) beräkna potenser av en matris med hjälp av diagonalisering]

Lösning: Låt $A = PDP^{-1}$ beteckna diagonaliseringen. Det gäller att $A^{17} = PD^{17}P^{-1}$, så

$$\begin{aligned}
A^{17}b &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

8. Är den kvadratiska formen $4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$ positivt (semi-)definit, negativt (semi-)definit eller indefinit? (3p)

[Mål: (7.2) förklara vad som menas med positivt definit, negativt definit och indefinit kvadratisk form och tillämpa sats 7.2.5 för klassificering av kvadratiska former.]

Lösning: Matrisen för den kvadratiska formen ges av $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Egenvärdena till denna matris är $3 \pm \sqrt{10}$, och då $\sqrt{10} > 3$ har vi ett positivt egenvärde och ett negativt egenvärde. Alltså är den kvadratiska formen indefinit.

9. Låt en bas $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ för $\mathbb{R}^3$ ges av $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $b_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$. Ange B-koordinaterna för vektorn $u = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 7 \end{bmatrix}^T$ och standardkoordinaterna för vektorn v med B-koordinaterna $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. (3p)

[Mål: 2.9 definiera begreppet koordinater för en vektor relativt en bas och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$]

Lösning: Alt. 1: ställ upp basbytesmatrisen $P_B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ och lös $u = P_B[u]_B$. Detta ger $[u]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$. Alt. 2: Observera att vi har en ortogonal bas och räkna ut koordinaterna direkt via t.ex. $\frac{u \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} = 3$. För v räknar vi helt enkelt ut $v = P_B[v]_B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 \end{bmatrix}^T$.

10. Med basen B från föregående uppgift, finns det en icke-trivial vektor vars B-koordinater är detsamma som dess standardkoordinater? Vad skulle en sådan vektor i så fall kallas? (3p)

[Mål: som föregående uppgift *och* (5.1) definiera begreppen egenvektor och egenvärde]

Lösning: En sådan vektor x skulle uppfylla $x = P_B x$ och alltså vara en egenvektor till basbytesmatrisen. Alt. 1: Radreducering av $\left[\begin{array}{c|c} P_B - I & 0 \end{array}\right]$ ger att den enda lösningen är $x = 0$, alltså finns ingen sådan icke-trivial vektor. Alt. 2: Vi kan även se detta genom att ställa upp den karakteristiska ekvationen för P_B och notera att P_B *inte* har egenvärdet 1, men detta leder här till lite mer jobb än Alt. 1.

---

11. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ har två egenvärden $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 4$. Diagonalisera A om möjligt, eller ange varför det inte går. (5p)

[Mål: (5.2) bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris *och* (1.5) skriva lösningsmängden till ett ekvationssystem på vektorform *och* (5.3) diagonalisera en matris]

Lösning: Matrisen är diagonaliserbar om egenrummen för λ_1 och λ_2 spänner upp hela rummet. Egenvektorerna för λ_1 ges av de icke-triviala lösningarna till $(A-2I)x=0$. Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & A-2I & & 0\\ & & & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

så egenrummet för λ_1 ges av $E_1 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. För λ_2 får vi egenrummet $E_2 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Eftersom $\dim E_1 + \dim E_2 = 2+1 = 3$ är A diagonaliserbar, och en diagonalisering ges av $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

12. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en avbildning som ges av $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+sx_2\\x_2\end{bmatrix}$ för en konstant s. (5p)

(a) Visa att T är en linjär avbildning. (2p)

(b) Härled standardmatrisen för T. (1p)

(c) Avgör om T är injektiv och/eller surjektiv. (2p)

[Mål: (1.8) avgöra om en given avbildning är linjär *och* (1.9) bestämma standardmatrisen till en linjär avbildning F då $F(v)$ är givet för tillräckligt många vektorer v *och* (1.9) avgöra om en linjär avbildning given på matrisform är injektiv och/eller surjektiv]

Lösning: a) Vi visar att $T(ax+by) = aT(x)+bT(y)$ för alla konstanter $a, b \in \mathbb{R}$ och vektorer $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} T(ax+by) &= T\left(\begin{bmatrix}ax_1+by_1\\ax_2+by_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}ax_1+by_1+s(ax_2+by_2)\\ax_2+by_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}ax_1+asx_2+by_1+sby_2)\\ax_2+by_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax_1+asx_2\\ax_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}by_1+sby_2)\\by_2\end{bmatrix} = T(x)+T(y)\end{aligned}$$

(Notera att detta bara är användning av räknelagarna för vektorer.)

b) För alla $x \in R^2$ har vi att $T(x) = \begin{bmatrix}1 & s\\0 & 1\end{bmatrix} x$, genom att skriva den givna formeln som en matris-vektor-produkt. Eftersom T är linjär är alltså $A = \begin{bmatrix}1 & s\\0 & 1\end{bmatrix}$ standardmatrisen för T.

c) Alt. 1: Injektiv betyder att om $T(x) = T(y)$ så är $x = y$, dvs. $T(x) = b$ har som mest 1 lösning. Men i det här fallet betyder $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)$ att $\begin{bmatrix}x_1+sx_2\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1+sy_2\\y_2\end{bmatrix}$, varifrån vi får att $x_2 = y_2$. Detta ger i sin tur att $x_1 = y_1$. Så ja, T är injektiv.

Surjektiv betyder att det för alla $y \in \mathbb{R}^2$ existerar ett $x \in \mathbb{R}^2$ sådant att $T(x) = y$. Men $\begin{bmatrix}x_1+sx_2\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ ger att $x_2 = y_2$ och sen får vi $x_1 = y_1 - sy_2$, dvs. systemet är lösbart för alla y. Så ja, T är surjektiv.

Alt. 2: Om $T(x) = Ax$ och A är inverterbar så är T både injektiv och surjektiv enligt satsen om inverterbara matriser. Men i det här fallet ser man lätt att $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (radreducera eller använd formeln för 2×2-matriser), så ja, T är både injektiv och surjektiv.

13. Antag att vi vet att ett *homogent* linjärt ekvationssystem med 7 ekvationer och 10 variabler har precis 5 stycken icke-triviala, linjärt oberoende lösningar. (5p)

(a) Kan vi alltid lösa det motsvarande icke-homogena ekvationssystemet? Motivera. (2p)

(b) Formulera satsen du använde för att lösa a) och definiera de två huvudsakliga koncepten den innehåller. (3p)

[Mål: (2.9) tillämpa Rang-satsen vid problemlösning *och* (2.9) definiera begreppet dimension av ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och bestämma dimensionen för ett underrum *och* (2.9) definiera begreppet rang för en matris och bestämma rangen för en matris *och* (2.9) formulera och bevisa Rang-satsen.]

Lösning: Ekvationssystemet beskrivs av en matris $A \in \mathbb{R}^{7\times 10}$, och vi vet enligt uppgiften att $\dim \operatorname{Nul} A = 5$. Enligt Rang-satsen (4.6.14) är då $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = 10 - 5 = 5$. Eftersom $\operatorname{Col} A$ alltså *inte* spänner upp hela målmängden $\mathbb{R}^7$ så kan vi inte garantera att $Ax = b$ alltid har en lösning. För b), se definitionerna av *rang* och *dimension* i Lay. Det skulle här räcka att ange Rang-satsen som "Sats: För en matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gäller att $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$".

14. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (5p)

(a) Visa att $Ax = b$ är inkonsistent. (1p)

(b) Bestäm en minstakvadrat-lösning $\hat{x}$ till systemet genom att ställa upp och lösa normalekvationerna. (3p)

(c) Beräkna minstakvadrat-felet (dvs. normen av residualen). (1p)

[Mål: (6.5) förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning *och* (6.5) förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till normalekvationerna $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.]

Lösning: a) Enkel radreducering ger att $0 = -1$, så ekvationssystemet har ingen lösning.

b) Normalekvationerna ges av $A^TA\hat{x} = A^Tb$, dvs. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$. Radreducering ger därför minstakvadrat-lösningen $\hat{x} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

c) Residualen är $A\hat{x} - b = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$, så minstakvadrat-felet blir $\|A\hat{x} - b\| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		