Tentamen
TMV186/185 Linjär algebra TD

120307 kl. 08.30–12.30

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Magnus Önnheim, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2012 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar. Bonuspoäng från redovisning av kryssuppgifter under 2012 räknas med i poängen för del 2.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 120308. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Förklara vad som menas med $W^\perp$ för ett underrum W av $\mathbb{R}^n$. (1p)

(b) Låt W vara det underrum av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Verifiera att vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ligger i $W^\perp$. (1p)

(c) Bestäm en ortogonal bas för W. (2p)

(d) Beräkna ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ på W. Skriv $\mathbf{y}$ som en summa $\mathbf{y} = \mathbf{y}' + \mathbf{y}''$ där $\mathbf{y}' \in W$ och $\mathbf{y}'' \in W^\perp$. (2p)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

(b) Ange en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^T$. (1p)

(c) Betrakta den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$. Gör ett variabelbyte $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ som överför Q till en kvadratisk form av typen $cy_1^2 + dy_2^2$. Ange U, c och d. (2p)

4. (a) Definiera begreppet *koordinater* för en vektor relativt en bas för ett underrum av $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Visa att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$, där (4p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix},$$

och ange koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ relativt basen $\mathcal{B}$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Följande deluppgifter, som maximalt kan ge 2p per deluppgift, skall besvaras med Sant eller Falskt. Svarar du Sant, ge en tydlig motivering. Svarar du Falskt, ge ett motexempel. Enbart svar ger inga poäng.

(a) Om T är en injektiv linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, så är $n \leq m$.

(b) Om A är radekvivalent med enhetsmatrisen så är A diagonaliserbar.

(c) Om P är ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ och $T(\mathbf{x})$ betecknar spegelbilden av vektorn $\mathbf{x}$ i P, så är standardmatrisen för avbildningen T diagonaliserbar.

6. (a) Visa att de fyra polynomen (3p)

$$B_0(t) = (1-t)^3, B_1(t) = 3t(1-t)^2, B_2(t) = 3t^2(1-t), B_3(t) = t^3$$

bildar en bas för rummet av alla polynom av grad högst 3 ($\mathbb{P}_3$).

(b) Bestäm koordinaterna för polynomet $p(t) = t^2 + 1$ i den basen. (3p)

7. (a) Visa att för varje matris A är $Nul(A) = Nul(A^T A)$. (3p)

(b) Visa till exempel med hjälp av sambandet i (a) att $Col(A) = Col(AA^T)$. (Du måste inte ha gjort (a) för att få utnyttja detta i (b).) (3p)

Lycka till!
Carl-Henrik Fant

Anonym kod	TMV186/185 Linjär algebra TD 120307	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Ange standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna även $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Ange en bas för $\mathrm{Col}(A)$ och en bas för $\mathrm{Nul}(A)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm den räta linje $y = a + bx$ som är bäst anpassad, i minstakvadrat-metodens mening, till punkterna $(x, y) = (1, 0), (2, 1), (3, 1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....