Tentamen
TMV141/165/166/185/186 Linjär algebra E/M/TD

120827 kl. 08.30–12.30

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Wojciechowski, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från Maple T.A. 2012 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter 120827. Tentan rättas och bedöms anonymt.

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) För vilka parametervärden p är följande ekvationssystem konsistent för varje högerled? (3p)

$$\begin{cases} x_1 + (p-1)x_2 + x_3 = b_1 \\ x_2 + 2x_3 = b_2 \\ px_1 + 2x_2 + px_3 = b_3 \end{cases}$$

(b) Välj ett parametervärde för vilket systemet i (a) är konsistent endast för vissa högerled och beskriv vilka villkor b_1, b_2, b_3 måste uppfylla för att systemet skall vara konsistent. (3p)

3. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm en ortogonal bas till nollrummet för A. (3p)

(b) Bestäm den vektor $\mathbf{x}$ i A:s nollrum som har minst avstånd till vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Beräkna också detta minimala avstånd. (3p)

4. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ har vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som egenvektor.

(a) Bestäm talet a och matrisens samtliga egenvärde och egenvektorer. (3p)

(b) För a i (a) lös följande system av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. (3p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Betrakta de fyra punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, a)$ där a är en reell parameter. Visa att den linje $y = kx + l$ som bäst ansluter till de givna punkterna i minstakvadratmetodens mening alltid går genom punkten $(-1/3, 1/2)$ oavsett vilket värde man sätter på a. (6p)

6. Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter. Definiera en avbildning $T : \mathbb{P}_2 \to: \mathbb{P}_2$ genom att

$$T(p) = p(1) + tp'(1) + t^2 p''(1).$$

(a) Visa att T är en linjär avbildning. (2p)

(b) Bestäm avbildningsmatrisen för T relativt basen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ för $\mathbb{P}_2$. (2p)

(c) Vad blir avbildningsmatrisen då vi tar basen $\mathcal{B} = \{1, 2 + t, t^2\}$ för $\mathbb{P}_2$ istället? (2p)

7. (a) Definiera vad som menas med linjärt oberoende mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$. Bevisa att fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ inte kan vara linjärt oberoende. (3p)

(b) Antag att A är en $n \times n$-matris och att det finns en vektor $\mathbf{x}$ sådan att $A^2\mathbf{x} \neq 0$ medan $A^3\mathbf{x} = 0$. Visa att vektorerna $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$ och $A^2\mathbf{x}$ är linjärt oberoende. (3p)

Motivera väl.

Lycka till!
Carl-Henrik Fant

Anonym kod	TMV141/165/166/185/186 Linjär algebra E/M/TD 120827

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös ekvationen (bestäm a) (3p)

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a \\ 2a & a & 1 \\ 3a+1 & a+1 & 2a \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm koordinatbytesmatrisen $\underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}{P}$ från basen $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ i $\mathbb{R}^2$ till $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (3p)
samt koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}}$ där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}^T$.

Lösning:

Svar: ....

(c) Ange LU-faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) För vilka värden på a bildar vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} -1, 1, a \end{bmatrix}^T$ en bas för $\mathbb{R}^3$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Lös matrisekvationen $A^{-1}XA = B$ där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....