TMV166/165 Linjär algebra M
Lösningar

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Vi ställer upp den utökade matrisen

$$[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{u}] = \left[\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 14 \\ 4 & -4 & a \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

och reducerar till trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a+16 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$\mathbf{u}$ tillhör Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ om och endast om systemet är konsekvent, dvs om och endast om $a = -16$.

Svar: $a = -16$.

(b) Totalmatrisen som svarar mot ekvationssystemet är:

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 & b_1 \\ 5 & 5 & 0 & b_2 \\ -1 & 3 & -4 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & b_3 \\ 0 & -10 & 10 & b_1 - 2b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix}.$$

Svar: Om $2b_1 + b_2 + b_3$ inte är lika med 0 finns ingen lösning. Om $2b_1 + b_2 + b_3 = 0$ finns oändligt många lösningar. Det finns aldrig unik lösning.

(c) En vektor ligger i ortogonala komplementet om den är vinkelrät mot båda vektorena i spannet. Om vektorn betecknas $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ så gäller

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0, \end{cases}$$

som t.ex. har en lösning $x = 1,\ y = 1,\ z = 2$, dvs $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ligger i ortogonala komplementet.

(d) Per definition av koordinatvektor har vi att

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{b}_1 - 2 \cdot \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sedan söker vi ett par linjärt oberoende vektorer $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ sådan att

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \mathbf{c}_1 - 3 \cdot \mathbf{c}_2.$$

Valet är inte unikt, men det funkar t.ex. med

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(e)

$$2A + XB = X \Rightarrow XB - X = -2A \Rightarrow X(B - I_2) = -2A \Rightarrow X = -2A(B - I_2)^{-1}.$$

Nu räknar vi

$$-2A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \; B - I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(f) $T(\mathbf{e}_2) = \frac{T(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_1)}{-2} = \frac{(0,1)-(1,-2)}{-2} = (1/2, -3/2)$

$$\left[\; T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \;\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

SVAR: $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -3/2 \end{bmatrix}$

2. Lösningen är inte unik men kan tex konstrueras på följande sätt.

Låt a_i beteckna kolonn i ur A.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Välj sedan a_4 och a_5 så att den givna vektorn ligger i nollrummet som önskat, dvs så att

$$-a_1 - 5a_2 - 3a_3 + 3a_4 + a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Till exempel:

$$a_4 = a_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}, a_5 = a_1 + 5a_2 = \begin{bmatrix} -21 \\ 6 \\ -6 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Eftersom kolonnerna i A är konstruerade som linjärkombinationer av de givna basvektorerna så ligger kolonnrummet till matrisen i spannet av de givna basvektorerna. Eftersom alla basvektorerna också finns med som kolonn 1 till 3 så ligger spannet av basvektorerna i kolumnrummet. Spannet av basvektorerna är alltså kolonnrummet.

3. (a) Först byter vi ut $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ mot en ortgonalbas via Gram-Schmidt processen. Tag $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$ och

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{-1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

För att underlätta väljer vi $\mathbf{w}_2 = [1\ 1\ 2\ 0]^T$. Normalisering ger sedan en ON-bas $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ med

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Kalla Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ för V. Vi har

$$\mathrm{Proj}_V \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 + \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\right)\mathbf{w}_2 = \left(\frac{-1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{9}{6}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Det karakteristiska polynomet p är:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \{\text{ utveckling längs 3:e kolumnen }\} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

Egenvärdena är rötterna till det karakteristiska polynomet, dvs, $\lambda = 1$ och $\lambda = -2$.

SVAR: Egenvärdena till A är 1 och -2.

(b) Först tar vi $\lambda = 1$.

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Variablerna x_2 och x_3 är fria och $x_1 = -2x_2$. Så den allmänna lösningen i parametrisk vektorform är

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så $V_1 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ där $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Sedan tar vi $\lambda = -2$.

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Variabeln x_3 är fri, $x_2 = x_3$, $x_1 = -x_3$ och den allmänna lösningen i parametrisk vektorform är

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Så $V_{-2} = \text{Span}\{\mathbf{v}_3\}$ där $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(c) Det följer direkt från (a) och (b) att $A = PDP^{-1}$ med

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Del 2: Överbetygsdelen

5. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $X^T X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}$, $X^T y = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -15 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 10 & 0 & -3 \\ 10 & 0 & 34 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -5/14 \end{bmatrix}$$

$\hat{y} = -\frac{2}{7} - \frac{3}{10}x - \frac{5}{14}x^2$

$$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/7 \\ 2/7 \\ 2/7 \\ 2/7 \\ 2/7 \end{bmatrix} + \frac{3}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{5}{14}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 8 \\ -46 \\ 90 \\ -74 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Största avståndet är alltså 9/7.

6. (a) Falskt. Man kan multiplicera ut VL m.h.a. den distributiva lagen och den blir $A^2 + AB + BA + B^2$. Så VL = HL om och endast om $AB = BA$, och vi vet ju att detta inte alltid gäller (matrismultiplikation är ej kommutativ). För ett specifikt exempel tag, säg, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Falskt. Att en matris A är radekvivalent med enhetsmatrisen innebär att den är inverterbar. Men en inverterbar matris behöver inte vara diagonaliserbar. Det enklaste motexemplet är kanske $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Sant. Låt $\mathbf{u} = [a\ b]^T$, $\mathbf{v} = [c\ d]^T$. Då är

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix}.$$

Om $a = b = 0$ så är $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, en motsägelse. Om $a = 0$ men $b \neq 0$, sä är översta raden $[0\ 0]$, medan att den nedersta raden är inte det för $c = d = 0$ skulle innebära att $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, också en motsägelse. Så i detta fall har vi en nollskild rad och $\text{rang}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1$. Ett liknande argument gäller om $a \neq 0$ och $b = 0$. Slutligen, om varken a eller b är noll, så är rad 2 en multipel av rad 1, och rangen är fortsatt lika med 1, ty $[c\ d] \neq [0\ 0]$ så ingen rad är noll.

7. (a) En kvadratisk matris P sägs vara en *ortogonalmatris* om $P^T = P^{-1}$. Ett exempel är $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, där $\theta \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\|U\mathbf{x}\|^2 = (U\mathbf{x})\cdot(U\mathbf{x}) = (U\mathbf{x})^T(U\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T U^T)(U\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(U^T U)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T I\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2.$$

(c) A och B har samma karakteristiska polynom ty,

$$\det(A - \lambda I) = \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = \det(P)\det(B - \lambda I)(\det P)^{-1},$$

enligt multiplikationssatsen för determinanter.