Lösningar till tentamen
TMV 141/166/186 Linjär algebra E/M/TD

120827 kl. 08.30–12.30

Examinator: Carl-Henrik Fant , Matematiska vetenskaper, Chalmers

---

1. (a) Vi har

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a \\ 2a & a & 1 \\ 3a+1 & a+1 & 2a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2a-2 & a-1 & 1 \\ 1-a & 1-a & 2a \end{vmatrix} = a(a-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -a(a-1)^2,$$

där vi i första steget bröt ut a från första raden och gjorde ett par kolonnoperationer, och i nästa steg bröt ut $a-1$ från första och andra kolonnen och sedan utvecklade längs första raden. Vi kan nu läsa av lösningarna $a = 0$ och $a = 1$.

(b) Upprepade radoperationer ger

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Alltså är

$$\underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}{P} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix}.$$

Härifrån kan vi läsa av

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix}.$$

(d) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att vektorerna bildar en bas om och endast om $a \neq 3$.

(e) Vi observerar att A är inverterbar med invers

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplikation av matrixekvationen med A från vänster och A^{-1} från höger ger då

$$X = ABA^{-1} = \cdots = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Systemets koefficientmatris kan skrivas

$$\begin{bmatrix} 1 & p-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ p & 2 & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & p-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2+p-p^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systemet är lösbart för alla högerled om och endast om $2+p-p^2 \neq 0$, dvs. för alla p utom $p = -1$ och $p = 2$.

(b) För $p = 2$ är den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 \\ 2 & 2 & 2 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right],$$

och vi ser att systemet är lösbart om och endast om $b_3 - 2b_1 = 0$. Väljer vi istället $p = -1$ får vi på samma sätt villkoret $b_1 + b_3 = 0$.

3. (a) Vi har

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorerna $\mathbf{u} = [1\ 1\ 1\ 0]^T$ och $\mathbf{v} = [1\ 1\ 0\ 1]^T$ bildar en bas för nollrummet. För att hitta en ortogonal bas väljer vi första basvektorn som $\mathbf{u}$ och kan ta andra basvektorn som

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

För att få enklare räkningar i del (b) multiplicerar vi denna vektor med 3 och väljer $\mathbf{e} = [1\ 1\ 1\ 0]^T$, $\mathbf{f} = [1\ 1\ -2\ 3]^T$ som ortogonal bas för nollrummet.

(b) Den sökta vektorn är ortogonala projektionen av $\mathbf{x} = [0\ 1\ 1\ 0]^T$ på nollrummet, och kan beräknas som

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}}{\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}}\mathbf{e} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{f}}{\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}}\mathbf{f} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Det sökta avståndet ges då av $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \left\|\frac{1}{5}[-3\ 2\ 1\ 1]^T\right\| = \sqrt{15}/5$.

4. (a) Vi beräknar

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ a+2 \end{bmatrix}.$$

För $a = 1$ är $\mathbf{u} = 3[1\ 1]^T$, det vill säga $[1\ 1]^T$ är en egenvektor med egenvärde 3. För andra värden på a är $\mathbf{u}$ inte parallell med $[1\ 1]^T$ och alltså ingen egenvektor. Vi väljer alltså $a = 1$ och beräknar

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3).$$

Även $\lambda = -1$ är alltså ett egenvärde. Slutligen löser vi $A\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ och finner lösningarna $\mathbf{x} = x_2[-1\ 1]^T$. Sammanfattningsvis har A egenvärden 3 och -1, med respektive egenvektorer $[1\ 1]^T$ och $[-1\ 1]^T$ (samt alla nollskilda multipler av dessa).

(b) Systemets allmänna lösning är

$$\mathbf{x}(t) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + B \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Insättning av begynnelsevillkoret ger $A = 1/2$, $B = -1/2$, så lösningen är

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{3t} + e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

5. Om linjen ifråga ges av $y = kx + l$ så är vektorn $\mathbf{x} = [k\ l]^T$ den entydiga lösningen till

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}, \tag{1}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}.$$

Att $y = kx + l$ går genom punkten $(-1/3, 1/2)$ betyder att $k = 3l - 3/2$, det vill säga

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3l - 3/2 \\ l \end{bmatrix}.$$

Med detta värde på $\mathbf{x}$ blir

$$A^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 20l - 9 \\ 10l - 3 \end{bmatrix}, \qquad A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2a+1 \\ a+2 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att (1) gäller för $l = (a+5)/10$. Oavsett valet av a definierar alltså lösningen till (1) en linje genom punkten $(-1/3, 1/2)$, vilket skulle visas.

Anmärkning: Alternativt kan man först lösa systemet (1) och sedan kontrollera att lösningen går genom $(-1/3, 1/2)$. Detta är kanske enklare att komma på men kräver något mer räknearbete.

6. (a) Det följer av vanliga deriveringsregler att $T(p+q) = T(p) + T(q)$ och $T(cp) = cT(p)$, där c är konstant.

(b) Vi beräknar

$$T(1) = 1, \qquad T(t) = 1 + t, \qquad T(t^2) = 1 + 2t + 2t^2,$$

och kan läsa av avbildningsmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi skriver

$$\begin{aligned} T(1) &= 1, \\ T(t+2) &= T(t) + 2T(1) = 3 + t = 1 + (t+2) \\ T(t^2) &= 1 + 2t + 2t^2 = 1 + 2((t+2) - 2) + 2t^2 = -3 + 2(t+2) + 2t^2, \end{aligned}$$

så avbildningsmatrisen blir nu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Se kursboken.

(b) Vi måste visa att om

$$a\mathbf{x} + bA\mathbf{x} + cA^2\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2a}$$

så är $a = b = c = 0$. Multiplicerar vi (2a) dels med A, dels med A^2, får vi

$$aA\mathbf{x} + bA^2\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2b}$$

$$aA^2\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2c}$$

där vi använde att $A^3\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eftersom $A^2\mathbf{x} \neq 0$ ger (2c) $a = 0$. Insättning av $a = 0$ i (2b) ger $b = 0$ och slutligen får vi $c = 0$ från (2a).