TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom presentation av kryssuppgifter. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårlästa lösningar.

Lycka till!

Tony

MATEMATISKA VETENSKAPER | TMV166 2016
Chalmers tekniska högskola | 2016–03–16 kl. 08:30–12:30 (SB Multisal)
Examinator: Tony Stillfjord | Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa
Telefonvakt: Tony Stillfjord, tel. 0706-441088

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Ange hur många lösningar följande ekvationssystem har: (3p)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -1x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Om det finns precis en lösning, ange även denna.

Lösning: Radreducera totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Alltså finns en unik lösning. Fortsätt till radkanonisk form:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Den unika lösningen är $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$.

2. Låt 2×2-matriserna A, B och C ges av (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ så att $AXB = C$.

Lösning: Vi har $X = A^{-1}CB^{-1}$. Via t.ex. formeln för matrisinvers i 2×2-fallet får vi att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

så

$$X = \begin{bmatrix} -9/2 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

3. För vilka värden på a är vektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} a \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$ linjärt beroende? (3p)

Lösning: Beteckna vektorerna med v_1, v_2 och v_3. Då v_1 och v_2 är uppenbart linjärt oberoende så är de tre vektorerna linjärt beroende omm $v_3 = c_1v_1 + c_2v_2$ för två tal c_1 och c_2. Detta är ekvivalent med att ekvationssystemet $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = v_3$ har en lösning. Radreducera därför totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & a \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & a-28 \end{array}\right].$$

Alltså är systemet konsistent endast om $a = 28$. (Och då är $v_3 = 12v_1 - 4v_2$.)

4. Låt $W = \text{Span}\{b_1, b_2\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ vara ett underrum av R^3. Ange två vektorer $y \in W$ och $z \in W^\perp$ så att $y + z = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Lösning: Eftersom b_1 och b_2 är ortogonala kan vi använda projektionsformeln direkt:

$$\text{proj}_W\, x = \frac{x \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 + \frac{x \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} b_2 = 2b_1 - b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vidare vet vi att den unika uppdelningen av x som efterfrågas ges av

$$x = \text{proj}_W\, x + \big(x - \text{proj}_W\, x\big),$$

så vi får

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad z = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5. Låt W, b_1 och b_2 vara som i föregående uppgift. Då är $B = \{b_1, b_2\}$ en bas för W. Om möjligt, bestäm B–koordinaterna för vektorn $v = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -11 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Lösning: Låt $P_B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ vara basbytesmatrisen från standardkoordinater till B–koordinater. Då gäller att $v = P_B[v]_B$. Radreducera totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} P_B & v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & 20 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Alltså ligger v i planet W, och genom att fortsätta till radkanonisk form får vi $[v]_B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix}^T$.

6. Beräkna determinanten av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Enklast är att använda det faktum att subtraktion av en rad från en annan rad inte ändrar determinanten, och sen kofaktor-expandera. Detta ger

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3.$$

7. Matriserna A och B nedan är radekvivalenta. Ange en bas för $\text{Col}\, A$ och en bas för $\text{Nul}\, A$. (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Matrisen B är på trappstegsform, och vi ser att det finns en pivotposition i kolonn 1 och i kolonn 2. En bas för $\text{Col}\, A$ ges av A:s pivotkolonner, alltså

$$\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}.$$

En bas för $\text{Nul}\, A$ får vi genom att skriva lösningarna till $Ax = 0$ på parametrisk form. Dessa är desamma som lösningarna till $Bx = 0$ och ges alltså av $x = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, där x_3 är en fri variabel. En bas för nollrummet är således mängden

$$\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

8. Låt A vara matrisen i föregående uppgift. Ange rank A, dim Nul A och dim Row A. (Endast poäng om alla tre talen är rätt.) (3p)

Lösning: Rangen av A är antalet bundna variabler, dvs. 2, och dimensionen av nollrummet är antalet fria variabler, dvs. 1. Dimensionen av radrummet är enligt Rang-satsen lika med matrisens rang, dvs. 2. Svar: $2, 1, 2$.

Alternativ lösning om man gjort föregående uppgift: Observera att $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = 2$ eftersom det finns två baselement i basen för $\operatorname{Col} A$. Basen för $\operatorname{Nul} A$ innehåller bara en vektor, så $\dim \operatorname{Nul} A = 1$. Enligt Rang-satsen är $\dim \operatorname{Row} A = \dim \operatorname{Col} A = 2$. Dvs. svar: $2, 1, 2$.

9. Låt $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ och $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en minstakvadrat-lösning till $X\beta = y$. (3p)

Lösning: En minstakvadrat-lösning $\hat{\beta}$ erhålls genom att lösa normalekvationerna $X^T X \hat{\beta} = X^T y$. Vi får

$$X^T X = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad X^T y = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

så enkel radreducering eller användning av formeln för matrisinvers ger att $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$.

10. En matris A kallas *idempotent* om $A^2 = A$. Vilka egenvärden kan en sådan matris anta? (3p)

Lösning: Om λ är ett egenvärde till A så finns ett $x \neq 0$ så att $Ax = \lambda x$. Men då är

$$A^2 x = A(Ax) = A\lambda x = \lambda A x = \lambda^2 x$$

och eftersom $A^2 x = Ax = \lambda x$ får vi att $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$. Detta ger $\lambda^2 = \lambda$ då $x \neq 0$, och alltså är λ antingen 0 eller 1. En idempotent matris kan således endast ha egenvärdena 0 och 1.

---

11. Man kan lätt visa att $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, dvs. mängden av alla $n \times n$-matriser, är ett vektorrum. Låt $U = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, \det A = 0 \right\}$ vara en delmängd av V. (5p)

(a) Definiera vad som menas med ett underrum till ett vektorrum. (2p)

(b) Är U ett underrum till V? I så fall, motivera varför. Om inte, ge ett motexempel. (3p)

Lösning: a) U är ett underrum till V ifall det är en delmängd av V som uppfyller att $0 \in U$, $u + v \in U$ för alla $u, v \in U$ och $cu \in U$ för alla $u \in U$ och $c \in \mathbb{R}$. b) Nollmatrisen ligger visserligen i U, men i allmänhet gäller för två matriser A och B att

$$\det\big(A + B\big) \neq \det A + \det B.$$

Alltså är U *inte* ett underrum. Ett motexempel ges t.ex. av matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa uppfyller $\det A = \det B = 0$, men $\det\big(A + B\big) = 1$.

12. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ har åtminstone två egenvektorer, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (5p)

Diagonalisera A, eller ange varför det inte går.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen för A är

$$\begin{aligned} 0 = \det\big(A - \lambda I\big) &= (-1-\lambda)\Big((-1-\lambda)(2-\lambda)+2\Big) \\ &= (-1-\lambda)\lambda(\lambda-1), \end{aligned}$$

så egenvärdena är $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 1$. Genom att multiplicera A med de givna vektorerna ser vi att $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ hör till λ_2 och $v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ hör till λ_3. Det återstår att undersöka egenvektorerna för λ_1. Men $(A - \lambda_1 I)x = 0$ ger att $x_1 = x_2 = 0$ och x_3 är en fri variabel. Alltså spänner $v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ upp egenrummet för λ_1. Då de tre egenrummen tillsammans spänner upp hela $\mathbb{R}^3$ är A diagonaliserbar, och en diagonalisering ges t.ex. av $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Betrakta följande MATLAB-kod: (5p)

```
x1 = [1; 1; 0];
x2 = [-1; 0; 1];

v1 = x1;
v2 = x2 - x2'*v1 / (v1'*v1) * v1;

v1 = v1 / norm(v1);
v2 = v2 / norm(v2);
```

(a) Vilken metod implementerar den? (1p)

(b) Vad beräknas? (1p)

(c) Visa att vilka x_1 och x_2 vi än väljer så blir v_1 och v_2 linjärt oberoende. (3p)

Lösning: a) Gram-Schmidts metod. b) En ortonormal bas för Span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (som är en parametrisk beskrivning av det plan i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x - y + z = 0$).
c) Antag att $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$. Eftersom v_1 och v_2 är ortogonala (per konstruktion) så får vi att

$$0 = v_1 \cdot (c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 v_1 \cdot v_1 + c_2 v_1 \cdot v_2 = c_1 v_1 \cdot v_1$$

Men eftersom v_1 och v_2 har normerats så är $v_1 \cdot v_1 = 1$ och därmed får vi $c_1 = 0$. Genom att istället ta skalärprodukten med v_2 får vi på samma sätt att $c_2 = 0$. Alltså är v_1 och v_2 linjärt oberoende.

14. Låt $\mathbb{P}^n$ beteckna vektorrummet som består av alla polynom p av grad högst n. Standardbasen för $\mathbb{P}^n$ ges av $B_n = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ där $b_k(t) = t^k$ för $k = 0, 1, \ldots, n$. Vidare, låt $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4$ vara den linjära avbildningen som avbildar andragrads-polynomet $p(t)$ på fjärdegrads-polynomet $p(t) + t^2 p(t)$. (5p)

(a) Om $p(t) = 2 + t^2$, vad är $(T(p))(t)$? (1p)

(b) Bestäm matrisen för T relativt standardbaserna för $\mathbb{P}^2$ och $\mathbb{P}^4$. (4p)

Lösning: a) $(T(p))(t) = 2 + t^2 + t^2(2 + t^2) = 2 + 3t^2 + t^4$.

b) Matrisen för T är den matris M som uppfyller att

$$[T(p)]_{B_4} = M[p]_{B_2}.$$

Den ges av
$$M = \left[\ [T(b_0)]_{B_4} \quad [T(b_1)]_{B_4} \quad [T(b_2)]_{B_4}\ \right] \in \mathbb{R}^{5\times 3}$$
då $\dim \mathbb{P}^2 = 3$ och $\dim \mathbb{P}^4 = 5$. Vi har
$$\begin{aligned}
(T(b_0))(t) &= 1 + t^2 = b_0(t) + b_2(t) && \Rightarrow && [T(b_0)]_{B_4} = \left[\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\ \right]^T \\
(T(b_1))(t) &= t + t^3 = b_1(t) + b_3(t) && \Rightarrow && [T(b_1)]_{B_4} = \left[\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\ \right]^T \\
(T(b_2))(t) &= t^2 + t^4 = b_2(t) + b_4(t) && \Rightarrow && [T(b_2)]_{B_4} = \left[\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\ \right]^T,
\end{aligned}$$
så
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Tony Stillfjord
Telefonvakt: Tony Stillfjord, tel. 0706-441088

TMV166 2016
2016–03–16 kl. 08:30–12:30 (SB Multisal)
Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		