TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom presentation av kryssuppgifter. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårlästa lösningar.

Lycka till!

Tony

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Ange hur många lösningar följande ekvationssystem har: (3p)

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

Om det finns precis en lösning, ange även denna.

Lösning: Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{c|c} & 3 \\ A & 6 \\ & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & -4 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -6 & -8 \\ 0 & -4 & -24 & -32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

dvs. det finns oändligt många lösningar till systemet.

2. Bestäm a så att $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & a \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ är singulär, dvs. inte inverterbar. (3p)

Lösning: Man kan radreducera även här, men snabbare är att bestämma determinanten. Kofaktorexpansion längs sista raden ger att

$$\det(A) = -3 \begin{vmatrix} -4 & a \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3(8-a).$$

Matrisen är singulär omm $\det(A) = 0$, så vi får att $a = 8$.

3. Låt $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $z = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sätt $W = \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$ och bestäm $x \in W$ och $y \in W^{\perp}$ sådana att $x + y = z$. (3p)

Lösning: Då $v_1 \cdot v_2 = 0$ är $\{v_1, v_2\}$ en ortogonal bas för W. Alltså ges den entydiga uppdelningen av

$$x = \operatorname{proj}_W z = \frac{z \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{z \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \frac{18}{2} v_1 + \frac{-6}{3} v_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$$

och

$$y = z - x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Då är $\mathrm{Nul}(A)$ ett r-dimensionellt underrum av $\mathbb{R}^k$. Bestäm talen r och k. (3p)

Lösning: Eftersom A är en 2×3-matris har vi direkt att $k = 3$. Radreducering ger efter ett steg att

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

dvs. det finns 1 fri variabel i $Ax = 0$. Nollrummet spänns således upp av 1 vektor, vilket ger $\dim \mathrm{Nul}(A) = 1$.

5. Med A som i föregående uppgift, avgör ifall den linjära avbildningen $T : x \mapsto Ax$ är injektiv och/eller surjektiv. (Endast poäng om båda svaren är rätt.) (3p)

Lösning: Eftersom nollrummet till A består av mer än nollvektorn är T inte injektiv; det finns $x \neq y$ sådana att $T(x) = T(y)$, dvs. $A(x - y) = 0$, $x - y \neq 0$. Dock är T surjektiv, eftersom de två första kolonnerna i A är linjärt oberoende. Dvs.
$\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^2$, så vi kan lösa $T(x) = y$ för alla $y \in \mathbb{R}^2$.

6. Bestäm det karakteristiska polynomet för $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Det karakteristiska polynomet ges av $\det(A - \lambda I)$. Via kofaktorexpansion längs första kolonnen får vi

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2 + 2) \\ &= (2-\lambda)\lambda(\lambda+1) \end{aligned}$$

Det skulle även gå bra att svara med t.ex. $-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$, men från detta uttryck kan man inte avläsa egenvärdena till A.

7. Bestäm de a för vilka det gäller att (3p)

$$\min_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1} x_1^2 + 2ax_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geq 0.$$

Lösning: Uttrycket som skall minimeras är en kvadratisk form. Vi kan skriva den på matrisform som $x^T Ax$, där $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Minimum av $x^T Ax$ under bivillkoret $\|x\| = 1$ ges av det minsta egenvärdet till A (se t.ex. Sats 7.3.6 i Lay), så vi beräknar detta:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - a^2) = (1-\lambda)\Big((\lambda - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2 - a^2\Big)$$

Det första egenvärdet $\lambda = 1$ är alltså positivt, och de andra två ges av $\lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$. Dessa två är icke-negativa omm $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \leq \frac{3}{2}$, dvs. $a^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{9}{4}$, vilket är ekvivalent med att $|a| \leq \sqrt{2}$.

8. Låt $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$. Bestäm en minstakvadrat-lösning till $X\beta = y$. (3p)

Lösning: En minstakvadrat-lösning $\hat{\beta}$ kan beräknas från normalekvationerna $X^T X\hat{\beta} = X^T y$. Här är $X^T X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ och $X^T y = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$. Radreducering eller användande av formeln för 2×2-matrisinvers ger alltså att $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. Låt $B = \{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$, och låt den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uppfylla $T(b_1) = 2b_1 + b_2$, $T(b_2) = b_1 - b_2$. Bestäm matrisen för T i basen B. (3p)

Lösning: Matrisen för T i basen B uppfyller för alla x att $[T(x)]_B = [T]_B[x]_B$, och ges således av

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T(b_1)]_B & [T(b_2)]_B \end{bmatrix}.$$

Från den givna informationen har vi att $[T(b_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $[T(b_2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, så $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. (Notera att vi inte behöver använda vad b_1 och b_2 har för värden.)

10. Bestäm a så att $\dim\Big(\mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}\Big) = 2$ då $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ a \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Eftersom v_1 och v_2 är linjärt oberoende har vi att $\dim\Big(\mathrm{Span}\{v_1, v_2\}\Big) = 2$. Skall samma sak gälla när vi lägger till v_3 så måste v_3 vara en linjärkombination av v_1 och v_2. Radreducering ger att

$$\left[\begin{array}{cc|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a-12 \end{array}\right].$$

För att systemet skall ha en lösning måste alltså $a = 12$.

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ vara givna. (5p)

a) Definiera vad som menas med en *bas* för ett underrum W. (3p)

b) Bestäm en bas B för Col(A). (1p)

c) Bestäm B-koordinaterna för v. (1p)

Lösning:

a) En bas för ett underrum W är en mängd B av linjärt oberoende vektorer (i W) som spänner upp W.

b) En bas för Col(A) ges av A:s pivotkolonner. Radreducering ger att

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & -8 & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dvs. en bas för W ges av $B = \{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

c) Vi får B-koordinaterna genom att lösa $v = c_1 b_1 + c_2 b_2$. Radreducering ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dvs. $[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

12. Låt x och v vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ där $\|v\| = 1$. Då ges den ortogonala projektionen av x på linjen som spänns upp av v av (5p)

$$\text{proj}_{\text{Span}\{v\}}\, x = \frac{x \cdot v}{v \cdot v} v = (x \cdot v)v = (v^T x)v = v(v^T x) = (vv^T)x,$$

där $A = vv^T$ är en $n \times n$-matris.

a) Visa att A är *idempotent*, dvs. att $A^2 = A$. (2p)

b) Idempotenta matriser har bara egenvärdena 0 och 1. Sätt $v = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och hitta $x \neq 0$ och $y \neq 0$ sådana att $Ax = 0$ och $Ay = y$. (3p)

Lösning:

a) Eftersom $1 = \|v\|^2 = v^T v$ får vi att $A^2 = vv^T vv^T = v1v^T = vv^T = A$.

b) Ett sätt är att lösa ekvationerna via t.ex. radreducering. Ett enklare sätt är att använda observationen $v^T v = 1$ från tidigare. Detta ger $vv^T v = v$, dvs. v är en egenvektor till A motsvarande egenvärdet 1. För att få en egenvektor som hör till egenvärdet 0 räcker det att hitta x så att $v^T x = 0$. Men detta är alla vektorer ortogonala mot v, alternativt ortogonala mot $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Tag t.ex. $x_1 = 1$ och $x_2 = 1$ och räkna ut x_3 från $1x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Detta ger $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

13. Låt ett system av ordinära differentialekvationer ges av (5p)

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) &= y_1(t) + 4y_2(t) \\
y_2'(t) &= 3y_1(t) + 5y_2(t).
\end{aligned}
$$

Bestäm alla lösningar till systemet genom att först skriva det på matrisform $y' = Ay$ och sedan

a) diagonalisera A, (2p)

b) göra ett variabelbyte som omvandlar systemet till ett system på diagonal form, (1p)

c) lösa det diagonala systemet av ODE, (1p)

d) och slutligen byta tillbaka till de ursprungliga variablerna. (1p)

Lösning:

Matrisformen är helt enkelt $y'(t) = Ay$, där $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Egenvärdena ges av $0 = (1-\lambda)(5-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda-3)^2 - 16$, dvs. $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 7$. För $\lambda_1 = 1$ får vi en egenvektor $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och för λ_2 får vi en egenvektor $v_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$. En diagonalisering ges av $A = PDP^{-1}$ där

$$
P = \begin{bmatrix} -2 & 2/3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.
$$

b) Variabelbytet $x = P^{-1}y$ leder till $x' = P^{-1}y' = P^{-1}PDP^{-1}y = Dx$. (Vi behöver inte bestämma P^{-1}.)

c) Det diagonala systemet har lösningen $x(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{7t} \end{bmatrix}$.

d) För att transformera tillbaka använder vi $y = Px$. Detta ger $y(t) = C_1 e^{-t} v_1 + C_2 e^{7t} v_2$, där v_1 och v_2 definierats ovan.

14. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & 9 & -4 \end{bmatrix}$ och antag att vektorerna p och b uppfyller $Ap = b$. (5p)

Bestäm *alla* x sådana att $Ax = b$. Motivera ditt svar.

Lösning: Vi har en partikulärlösning given, så det återstår att bestämma alla lösningar till det homogena systemet. Om $Ar = 0$ så är $A(p+r) = Ap + Ar = b + 0 = b$, dvs. $x = p + r$ är en lösning till $Ax = b$ för varje sådant r. Det finns inga fler lösningar, eftersom om $Ax = b$ så är $A(x-p) = Ax - Ap = b - b = 0$, dvs. $x - p$ är en lösning till det homogena systemet. Men om vi kallar $x - p$ för r så har vi ju $x = p + (x-p) = p + r$ och $Ar = 0$.

Radreducering (ja, 4×4, men lätta siffror) ger att

$$
A \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

så alla lösningar till $Ax = 0$ ges på parametrisk form av $x = s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Således får vi alla lösningar till $Ax = b$ som $x = p + s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, där s och t är godtyckliga konstanter.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Tony Stillfjord
Telefonvakt: Carl Lundholm, ankn. 5325

TMV166 2017
2017–03–13 kl. 14:00–18:00 (H)
Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	**Svar**	**Poäng**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		