TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Lista över alla lärmål

Nedan följer en sammanfattning av alla lärmål i kursen, uppdelade enligt godkänt- och överbetygskriterier. Efter denna lista följer ytterligare en lista utan någon uppdelning.

Uppdelade lärandemål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
1.1	lösa linjära ekvationssystem med eliminationsmetoden
1.1	förklara hur de olika typerna av lösningsmängder uppkommer och hur de kan beskrivas.
1.2	använda sats 1.2.2 i problemlösning
1.3	förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med en vektorekvation $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$
1.3	avgöra om en vektor är en *linjärkombination* av givna vektorer.
1.3	avgöra om en vektor tillhör linjära höljet (span) av givna vektorer.
1.4	använda sats 1.4.4 i problemlösning
1.4	förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
1.5	skriva lösningsmängden till ett ekvationssystem på vektorform
1.7	avgöra om en given mängd av vektorer är *linjärt beroende* eller *linjärt oberoende*.
1.8	avgöra om en given avbildning är linjär
1.9	bestämma standardmatrisen till en linjär avbildning F då $F(\mathbf{v})$ är givet för tillräckligt många vektorer $\mathbf{v}$.
1.9	bestämma standardmatrisen till en linjär avbildning som ges av en geometrisk beskrivning
1.9	avgöra om en linjär avbildning given på matrisform är *injektiv* och/eller *surjektiv*
2.1	addera matriser
2.1	multiplicera matriser dels genom användning av definitionen, dels med *rad* • *kolonn*-metoden.
2.1	utnyttja räknereglerna i sats 2.1.2 vid beräkningar
2.1	ge exempel som visar att (a) matrismultiplikationen inte är kommutativ. (b) annulleringslagen *inte* gäller , man kan alltså inte ”förkorta”: $AB = AC \not\Rightarrow B = C$. (c) en matrisprodukt AB kan vara en 0-matris trots att ingen faktor är 0-matris.
2.1	transponera matriser
2.1	utnyttja räknereglerna i sats 2.1.3 vid beräkningar
2.2	beräkna matrisinvers med hjälp av sats 2.2.4 och metoden i exempel 2.2.7
2.2	tillämpa sats 2.2.5 och 2.2.6 i problemlösning
2.3	tillämpa sats 2.3.8 i problemlösning
2.5	bestämma LU-faktorisering av en matris där det inte krävs radbyte.
2.8	definiera begreppet underrum i $\mathbb{R}^n$ och avgöra om en viss mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.8	definiera begreppet *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

2.8 4.2	definiera begreppet *nollrum*, Nul(A), till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör Nul(A) samt bestämma en bas för Nul(A).
2.8 4.2	definiera begreppet *kolonnrum*, Col(A), till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör Col(A) samt bestämma en bas för Col(A).
2.9	definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.9	definiera begreppet *dimension* av ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och bestämma dimensionen för ett underrum.
2.9	definiera begreppet *rang* för en matris och bestämma rangen för en matris.
2.9	tillämpa *Rang-satsen* vid problemlösning
2.9	tillämpa *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* vid problemlösning
4.7	växla mellan olika baser för $\mathbb{R}^n$, Sats 4.7.15 är central.
3.1	beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek med hjälp av sats 1
3.2	förenkla kalkylerna med hjälp av sats 2, 3 och 5
3.2	utnyttja sats 4 för att avgöra om en matris är inverterbar
3.2	tillämpa sats 6 i problemlösning
5.1	definiera begreppen *egenvektor* och *egenvärde*.
5.2	förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärden.
5.2	bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.
5.3	bestämma egenvektorsbas till en matris
5.3	*diagonalisera* en matris
5.3	beräkna potenser av en matris med hjälp av diagonalisering
5.7	utnyttja matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.
6.1	beräkna skalärprodukten av två vektorer i $\mathbb{R}^n$, tillämpa räknereglerna för skalärprodukt, beräkna norm av en vektor i $\mathbb{R}^n$ och beräkna avståndet mellan vektorer i $\mathbb{R}^n$.
6.1	avgöra om två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala
6.1	bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.
6.1	förklara vad som menas med $W^\perp$ om W är ett underrum i $\mathbb{R}^n$
6.1	tillämpa sats 6.1.3 vid problemlösning.
6.2	förklara vad som menas med *ortogonal bas* för ett underrum W och tillämpa sats 6.2.5 för beräkning av koordinaterna för en vektor $\mathbf{y} \in W$ relativt en ortogonal bas för W.
6.2	använda projektionsformeln 6.2.(2) i problemlösning
6.2	förklara vad som menas med *ortonormerad bas* för ett underrum W.
6.2	förklara vad som menas med en ortogonal matris.
6.3	tillämpa sats 6.3.8 för att dela upp en vektor i ortogonala komponenter, en i W och den andra i $W^\perp$ då en ortogonal bas för W är känd.
6.4	tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$utgående från en annan bas för W.

6.5	förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning
6.6	tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.
7.1	tillämpa satserna 7.1.1 – 7.1.3 vid problemlösning. Spektralsatsen (sats 7.1.3) är extra viktig.
7.2	tillämpa sats 7.2.4 **Satsen om principalaxlar** för att skriva en kvadratisk form utan blandade termer.

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
1.1	förklara varför eliminationsmetoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär.
1.3	redogöra för begreppen *linjärkombination* och *linjärt hölje*.
1.4	bevisa sats 1.4.4
1.5	bevisa sats 1.5.6
1.7	redogöra för begreppen *linjärt beroende* och *linjärt oberoende*
1.7	förklara hur begreppen *linjärkombination*, *linjärt hölje*, *linjärt beroende* och *linjärt oberoende* hänger samman med egenskaper hos ekvationssystem, matrisekvationer och vektorekvationer
1.7	bevisa sats 1.7.8 och 1.7.9
1.9	besvara teoretiska frågor om injektivitet och surjektivitet för linjära avbildningar.
2.1	bevisa att $A(BC) = (AB)C$.
2.2	definiera begreppet inverterbar matris
2.2	förklara varför metoden i exempel 2.2.7 ger det önskade resultatet.
2.3	bevisa sats 2.3.8.
2.8 4.2	bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$ och känna till deras tolkningar i samband med ekvationssystem och linjära transformationer.
2.9	formulera och bevisa *Rang-satsen*.
4.1	känna till de viktigaste exemplen på vektorrum och kunna ge belysande exempel.
4.1	definiera begreppet underrum i ett vektorrum och kunna avgöra om en given delmängd av ett känt vektorrum är ett underrum
4.3	definiera begreppet *bas* för ett vektorrum
4.4	definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas.
4.4	använda koordinatbytesmatriser vid problemlösning
4.5	bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V, än vad som finns i en bas för V, måste vara linjärt beroende samt utnyttja detta för att bevisa att antalet vektorer i en bas för ett vektorrum är entydigt bestämt.
4.5	definiera begreppet *dimension* för vektorrum.
4.6	förklara varför de olika egenskaperna som nämns i *Satsen om inverterbara matriser* *(The invertible Matrix Theorem)* är ekvivalenta.
4.7	växla mellan olika baser för andra vektorrum än $\mathbb{R}^n$.

3.2	bevisa att en matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$ (sats 4)
3.3	utnyttja Cramers regel (sats 7) i problemlösning
3.3	redogöra för determinantens tolkning som area- eller volymskala för en linjär avbildning
5.7	förklara, med hjälp av variabelbyte, hur diagonalisering av matris leder till den allmänna lösningen till ett system av linjära differentialekvationer
5.4	bestämma och använda avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ till en linjär avbildning T från V till V, relativt en given bas $\mathcal{B}$ för V
5.4	växla mellan olika baser i samband med linjära avbildningar
5.4	tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar.
6.1	bevisa sats 6.1.3.
6.2	bevisa sats 6.2.4: en ortogonal mängd av vektorer är linjärt oberoende.
6.2	bevisa sats 6.2.7 då U är en ortogonal matris.
6.4	förklara varför Gram-Schmidt processen leder till en ortogonal bas.
6.5	förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till den normalekvationen $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.
7.2	förklara vad som menas med positivt definit, negativt definit och indefinit kvadratisk form och tillämpa sats 7.2.5 för klassificering av kvadratiska former.

Alla lärandemål:

Lay	Mål
1.1	lösa linjära ekvationssystem med eliminationsmetoden
1.1	förklara hur de olika typerna av lösningsmängder uppkommer och hur de kan beskrivas.
1.1	förklara varför eliminationsmetoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär.
1.2	använda Sats 1.2.2 i problemlösning
1.3	förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med en vektorekvation $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$
1.3	redogöra för begreppen *linjärkombination* och *linjärt hölje*.
1.3	avgöra om en vektor är en *linjärkombination* av givna vektorer.
1.3	avgöra om en vektor tillhör linjära höljet (span) av givna vektorer.
1.4	förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
1.4	använda Sats 1.4.4 i problemlösning
1.4	bevisa Sats 1.4.4
1.5	skriva lösningsmängden till ett ekvationssystem på vektorform
1.5	bevisa Sats 1.5.6
1.7	redogöra för begreppen *linjärt beroende* och *linjärt oberoende*
1.7	avgöra om en given mängd av vektorer är *linjärt beroende* eller *linjärt oberoende*.
1.7	förklara hur begreppen *linjärkombination*, *linjärt hölje*, *linjärt beroende* och *linjärt oberoende* hänger samman med egenskaper hos ekvationssystem, matrisekvationer och vektorekvationer
1.7	bevisa Sats 1.7.8 och 1.7.9
1.8	avgöra om en given avbildning är linjär
1.9	bestämma standardmatrisen till en linjär avbildning F då $F(\mathbf{v})$ är givet för tillräckligt många vektorer $\mathbf{v}$.
1.9	bestämma standardmatrisen till en linjär avbildning som ges av en geometrisk beskrivning
1.9	avgöra om en linjär avbildning given på matrisform är *injektiv* och/eller *surjektiv*
1.9	besvara teoretiska frågor om injektivitet och surjektivitet för linjära avbildningar.
2.1	addera matriser
2.1	multiplicera matriser dels genom användning av definitionen, dels med *rad* • *kolonn*-metoden.
2.1	utnyttja räknereglerna i Sats 2.1.2 vid beräkningar
2.1	ge exempel som visar att (a) matrismultiplikationen inte är kommutativ. (b) annulleringslagen *inte* gäller , man kan alltså inte ”förkorta”: $AB = AC \not\Rightarrow B = C$. (c) en matrisprodukt AB kan vara en 0-matris trots att ingen faktor är 0-matris.
2.1	transponera matriser
2.1	utnyttja räknereglerna i Sats 2.1.3 vid beräkningar
2.1	bevisa att $A(BC) = (AB)C$.
2.2	definiera begreppet inverterbar matris
2.2	beräkna matrisinvers med hjälp av Sats 2.2.4 och metoden i exempel 2.2.7
2.2	förklara varför metoden i exempel 2.2.7 ger det önskade resultatet.
2.2	tillämpa Sats 2.2.5 och 2.2.6 i problemlösning
2.3	tillämpa Sats 2.3.8 i problemlösning

2.3	bevisa Sats 2.3.8.
2.5	bestämma LU-faktorisering av en matris där det inte krävs radbyte.
4.1	känna till de viktigaste exemplen på vektorrum och kunna ge belysande exempel.
2.8	definiera begreppet underrum i $\mathbb{R}^n$ och avgöra om en viss mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
4.1	definiera begreppet underrum i ett vektorrum och kunna avgöra om en given delmängd av ett känt vektorrum är ett underrum
2.8	definiera begreppet *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
4.3	definiera begreppet *bas* för ett vektorrum
2.9	definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
4.4	definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas.
4.4	använda koordinatbytesmatriser vid problemlösning
4.7	växla mellan olika baser för $\mathbb{R}^n$, Sats 4.7.15 är central.
4.7	växla mellan olika baser för andra vektorrum än $\mathbb{R}^n$.
4.5	bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V, än vad som finns i en bas för V, måste vara linjärt beroende samt utnyttja detta för att bevisa att antalet vektorer i en bas för ett vektorrum är entydigt bestämt.
2.9	definiera begreppet *dimension* av ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och bestämma dimensionen för ett underrum.
4.5	definiera begreppet *dimension* för vektorrum.
2.8 4.2	definiera begreppet *nollrum*, $\mathrm{Nul}(A)$, till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör $\mathrm{Nul}(A)$ samt bestämma en bas för $\mathrm{Nul}(A)$.
2.8 4.2	definiera begreppet *kolonnrum*, $\mathrm{Col}(A)$, till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör $\mathrm{Col}(A)$ samt bestämma en bas för $\mathrm{Col}(A)$.
2.8 4.2	bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$ och känna till deras tolkningar i samband med ekvationssystem och linjära transformationer.
2.9	definiera begreppet *rang* för en matris och bestämma rangen för en matris.
2.9	tillämpa *Rang-satsen* vid problemlösning
2.9	formulera och bevisa *Rang-satsen*.
2.9	tillämpa *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* vid problemlösning
4.6	förklara varför de olika egenskaperna som nämns i *Satsen om inverterbara matriser* *(The invertible Matrix Theorem)* är ekvivalenta.
3.1	beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek med hjälp av Sats 3.1.1
3.2	förenkla kalkylerna med hjälp av Sats 3.2.2, 3.2.3 och 3.2.5
3.2	bevisa att en matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$ (Sats 3.2.4)
3.2	utnyttja Sats 3.2.4 för att avgöra om en matris är inverterbar
3.2	tillämpa Sats 3.2.6 i problemlösning
3.3	utnyttja Cramers regel (Sats 3.3.7) i problemlösning

3.3	redogöra för determinantens tolkning som area- eller volymskala för en linjär avbildning
5.1	definiera begreppen *egenvektor* och *egenvärde*.
5.2	förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärden.
5.2	bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.
5.3	bestämma egenvektorsbas till en matris
5.3	*diagonalisera* en matris
5.3	beräkna potenser av en matris med hjälp av diagonalisering
5.7	utnyttja matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.
5.7	förklara, med hjälp av variabelbyte, hur diagonalisering av matris leder till den allmänna lösningen till ett system av linjära differentialekvationer
5.4	bestämma och använda avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ till en linjär avbildning T från V till V, relativt en given bas $\mathcal{B}$ för V
5.4	växla mellan olika baser i samband med linjära avbildningar
5.4	tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar.
6.1	beräkna skalärprodukten av två vektorer i $\mathbb{R}^n$, tillämpa räknereglerna för skalärprodukt, beräkna norm av en vektor i $\mathbb{R}^n$ och beräkna avståndet mellan vektorer i $\mathbb{R}^n$.
6.1	avgöra om två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala
6.1	bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.
6.1	förklara vad som menas med $W^\perp$ om W är ett underrum i $\mathbb{R}^n$
6.1	tillämpa Sats 6.1.3 vid problemlösning.
6.1	bevisa Sats 6.1.3.
6.2	förklara vad som menas med *ortogonal bas* för ett underrum W och tillämpa Sats 6.2.5 för beräkning av koordinaterna för en vektor $\mathbf{y} \in W$ relativt en ortogonal bas för W.
6.2	använda projektionsformeln 6.2.(2) i problemlösning
6.2	förklara vad som menas med *ortonormerad bas* för ett underrum W.
6.2	förklara vad som menas med en ortogonal matris.
6.2	bevisa Sats 6.2.4: en ortogonal mängd av vektorer är linjärt oberoende.
6.2	bevisa Sats 6.2.7 då U är en ortogonal matris.
6.3	tillämpa Sats 6.3.8 för att dela upp en vektor i ortogonala komponenter, en i W och den andra i $W^\perp$ då en ortogonal bas för W är känd.
6.4	tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$utgående från en annan bas för W.
6.4	förklara varför Gram-Schmidt processen leder till en ortogonal bas.
6.5	förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning
6.5	förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till den normalekvationen $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.
6.6	tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.
7.1	tillämpa satserna 7.1.1 – 7.1.3 vid problemlösning. Spektralsatsen (Sats 7.1.3) är extra viktig.

7.2	tillämpa Sats 7.2.4 **Satsen om principalaxlar** för att skriva en kvadratisk form utan blandade termer.
7.2	förklara vad som menas med positivt definit, negativt definit och indefinit kvadratisk form och tillämpa Sats 7.2.5 för klassificering av kvadratiska former.