TMV166 Linjär algebra för M, vt 2017
Vecko–PM läsvecka 5

Lay: 5.1-5.4, 5.7-5.8 Egenvärden och egenvektorer

Begreppen *egenvektor* och *egenvärde* som introduceras i **5.1** är centrala, såväl i matematik som i många tillämpningar. Om x är en egenvektor till A så förändras bara "längden" på x av multiplikation med A, inte dess riktning.
I många problem, matematiska eller tillämpade, är det väsentligt att bestämma en bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till en matris A. Det första steget är då att lösa matrisens karakteristiska ekvation som nämns i **5.2**. Sedan kan man ofta stödja sig på Sats 6 för att bestämma den önskade basen. En viktig tillämpning av detta ges först i **5.3**, diagonalisering av matriser, och senare då diagonaliseringen utnyttjas i olika tillämpningar. Vi kommer här att behandla matrispotenser, avbildningsmatriser för linjära avbildningar **5.4**, system av linjära differentialekvationer i **5.7** och kvadratiska former senare i kapitel 7 (om tiden räcker till).

En annan intressant tillämpning ges i hållfasthetslära. Spänningsmatrisen $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ beskriver normalspänningar σ och skjuvspänningar τ i plan parallella med koordinatplanen, genom en kropp som påverkas av inre och yttre krafter. Egenvektorer till matrisen $\mathcal{S}$ är huvudspänningsriktningarna, motsvarande egenvärden är normalspänningen i plan vinkelräta mot egenvektorn. I dessa plan är skjuvspänningen noll. Matrisen $\mathcal{S}$ är alltid symmetrisk och därmed, vilket vi skall se senare, alltid diagonaliserbar. Andra intressanta egenskaper kommer vi att studera under vecka 6.

Det går inte att *exakt* bestämma egenvärdena till en allmän $n \times n$-matris när $n \geq 5$, då detta är ekvivalent med att hitta alla lösningar till ett polynom av grad n. Istället måste dessa uppskattas numeriskt, och i **5.8** ska vi se ett exempel på en iterativ metod för detta ändamål. Dylika metoder genererar bättre och bättre approximationer ju mer beräkningsarbete man utför, så approximationen kan i princip bli godtyckligt noggrann.

Veckans kapitel kommer att behandlas i ordningen 5.1, 5.2, 5.3, 5.7, 5.4, 5.8

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
5.1	definiera begreppen *egenvektor* och *egenvärde*.
5.2	förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärden.
5.2	bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.
5.3	bestämma egenvektorsbas till en matris
5.3	*diagonalisera* en matris
5.3	beräkna potenser av en matris med hjälp av diagonalisering
5.7	utnyttja matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
5.7	förklara, med hjälp av variabelbyte, hur diagonalisering av matris leder till den allmänna lösningen till ett system av linjära differentialekvationer
5.4	bestämma och använda avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ till en linjär avbildning T från V till V, relativt en given bas $\mathcal{B}$ för V
5.4	växla mellan olika baser i samband med linjära avbildningar
5.4	tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
5.1	PP, 1, 3, 5, 7, 9	13, ***15***, 17, 19, 21, 22	25, 29, 31
5.2	PP, 1, 5, 9	12, ***13***, 17, 19, 21, 22	20
5.3	PP, 1, 5, 7	3, 11, 15, 17, 21, 22	23, 27, 31, 32
5.7	1, 3		5, 7
5.4			PP, 1, 3, 5, 9, 11, ***15***, 21, 32

OBS! Bortse från frågor som berör sänka, källa eller sadelpunkt i 5.7.