Idag: Bas och koordinatsystem
4.3, 4.4, 4.7

Introduktion av datorövning "Fackverk".

För $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ har vi

$$X = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

där e_j är den j:te enhetsvektorn.

Vi kallar $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ en bas för $\mathbb{R}^n$ och $[X]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ koordinaterna för X i basen B. (Här är $[x]_B = x$, på grund av standardbasen.)

Mer allmänt har vi:

Def En bas för ett vektorrum V är en mängd $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ av linjärt oberoende vektorer som spänner upp V.

Koordinaterna för $x \in V$ i basen B är koefficienterna $[X]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, där $x = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j$.

Obs 1: Koordinaterna är unika, för $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = d_1 b_1 + \dots + d_n b_n$

$\Rightarrow (c_1 - d_1) b_1 + \dots + (c_n - d_n) b_n = 0$

$\overset{B \text{ linj. ober.}}{\Rightarrow} c_1 - d_1 = \dots = c_n - d_n = 0$, dvs $d_j = c_j$.

Obs 2: $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$, ty B är linj. ober. och $\mathbb{R}^n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

Obs 3: Om $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ är linj. ober. så är den en bas för vektorrummet $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$

En bas för V innehåller minsta tillräckliga information som beskriver V:

* ta bort en vektor ur basen och vi kan inte nå hela V
* lägg till en vektor så är de inte längre linj. ober.

Ex $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} = \{v_1, v_2\}$ är bas för $\mathbb{R}^2$, ty

* $\operatorname{span}\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^2$

  Bevis. Tag $y \in \mathbb{R}^2$, sätt $A = [v_1 \; v_2]$ och lös $Ax = y$.

  $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 2 & 4 & y_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & -2 & y_2 - y_1 \end{array}\right]$$ har lösning!

* linj. ober. Bevis: lös $Ax = 0$, unik lösning $x = 0 \Rightarrow$ linj ober.

Ta bort v_2: $\{v_1\}$ ej bas för $\mathbb{R}^2$, ty $\operatorname{span}\{v_1\} \neq \mathbb{R}^2$

Lägg till en annan vektor v_3: $\{v_1, v_2, v_3\}$ är ej linj ober. ty $v_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2$, ej bas.

Sats 5 (i 4.3) Låt $v_1, \ldots, v_p \in V$ och sätt $U = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$. Om en v_j är linj komb. av de övriga så är även

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_p\} = U.$$

Om $U \neq \{0\}$ så är någon delmängd av $\{v_1, \ldots, v_p\}$ en bas för U.

Utan bevis.

Byte av bas i $\mathbb{R}^n$.

$E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ kallas standardbasen för $\mathbb{R}^n$ och $[x]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Vad blir koordinaterna $[x]_B$ för x i en annan bas B?

<u>Def</u> Låt $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$. <u>Koordinatbytesmatrisen</u> är

$$P_B=[b_1,\dots,b_n].$$

Då har vi
$$\begin{cases} c=\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=[x]_B \\ x=c_1b_1+\dots+c_nb_n=P_Bc\end{cases}$$

dvs
$$\boxed{\underset{\text{gamla}}{x}=P_B\underset{\text{nya koord.}}{[x]_B}}$$

För att gå åt andra hållet:
$$\boxed{[x]_B=P_B^{-1}x.}$$

(Varför är P_B inverterbar?)

<u>Byte mellan två baser</u>

Låt $B=\{b_1,\dots,b_n\}$, $C=\{c_1,\dots,c_n\}$ vara baser i $\mathbb{R}^n$.

Vi har då
$$P_B:[x]_B\mapsto x,\quad P_C^{-1}:x\mapsto[x]_C$$

så att
$$\boxed{\begin{gathered}P_C^{-1}P_B:[x]_B\mapsto[x]_C\\ [x]_C=P_C^{-1}P_B[x]_B\end{gathered}}$$

Basbytesmatrisen $P_C^{-1}P_B$ kan bestämmas med radreducering:
$$[P_C\ P_B]=[c_1,\dots,c_n\,|\,b_1,\dots,b_n]\sim[I\,|\,P_C^{-1}P_B]$$

<u>Ex</u> Låt $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $C=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$ vara två baser för $\mathbb{R}^2$.

Vi har $P_B = \begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$, $P_C = \begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$.

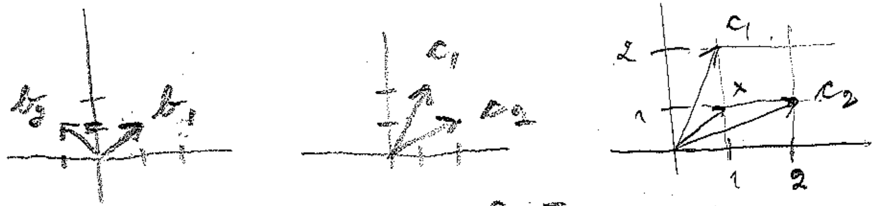
och $P_B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$, $P_C^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$.

$$P_C^{-1}P_B = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&-3\\-1&+3\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&3\\1&-3\end{bmatrix}$$

Eller med radreducering:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&2\\1&1&2&1\end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1/3&1\\0&1&1/3&-1\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1/3&1\\1/3&-1\end{bmatrix}}_{= P_C^{-1}P_B}$$

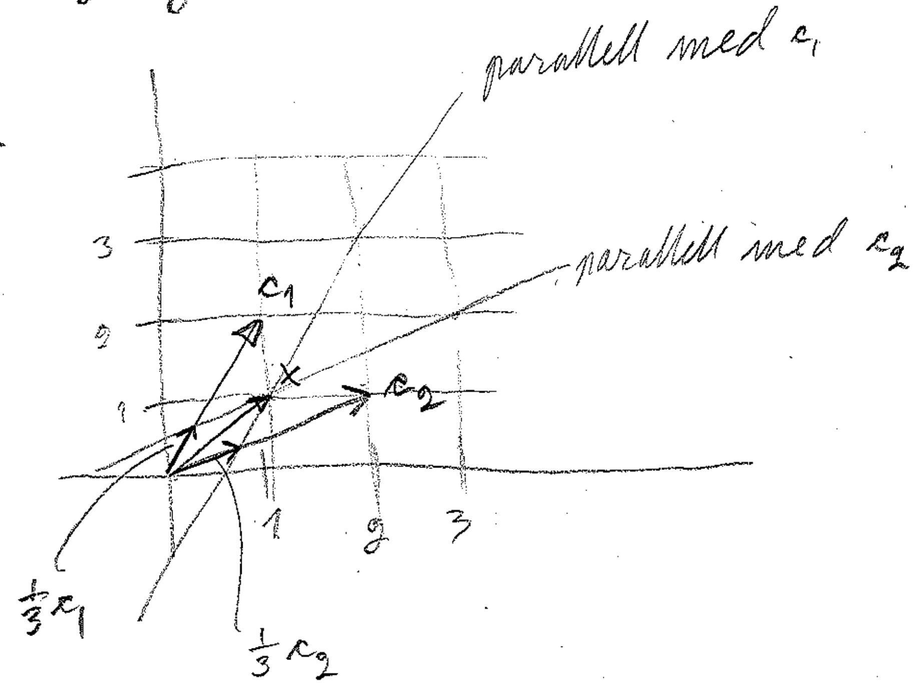


Testa: tag $[x]_B = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, då är $x = P_B[x]_B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. I C-koordinater fås

$$[x]_C = P_C^{-1}x = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\end{bmatrix}$$

eller $[x]_C = P_C^{-1}P_B[x]_B = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}&1\\1/3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\end{bmatrix}$

Tydligare figur:



Om rummet V inte är $\mathbb{R}^n$ men har en bas $\{b_1, \dots, b_n\}$ så finns ingen matris P_B. Men vi kan tala om koordinatavbildningen

$$X \mapsto [X]_B.$$
$$V \to \mathbb{R}^n$$

Ex $V_5 = \{$alla polynom av grad högst 5$\}$. Om $p \in V_5$ så är $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_5 x^5$.

Bilda $B = \{p_0, p_1, \dots, p_5\}$ där $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x, \dots, p_5(x) = x^5$.

Linj. oberoende: $c_0 p_0 + \dots + c_5 p_5 = 0$

$$\Rightarrow c_0 + c_1 x + \dots + c_5 x^5 = 0 \ \forall x$$
$$\Rightarrow c_0 = c_1 = \dots = c_5 = 0$$

Klart att $V_5 = \mathrm{span}\{p_0, \dots, p_5\}$. Alltså: B är bas för V_5.

Koordinatavbildningen är

$$p(x) = a_0 + \dots + a_5 x^5 \mapsto \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_5 \end{bmatrix} = [p]_B$$
$$V_5 \longrightarrow \mathbb{R}^6$$

T.ex. $p(x) = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$

$$[p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Koordinatavbildningen låter oss identifiera V_5 med $\mathbb{R}^6$.

Sats 8 (i 4.4) Koordinatavbildningen $T: x \mapsto [x]_B$, $T: V \to \mathbb{R}^n$ är linjär och inverterbar. (En sådan avbildning kallas isomorfism mellan vektorrummen V och $\mathbb{R}^n$.)