Idag: Determinant
3.1, 3.2 (ej 3.3)

Viktigt: * A är inverterbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
* beräkna area och volym

Vi ska definiera <u>determinanten</u> $\det A$ för kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vi har redan gjort det för $n = 1, 2, 3$ i vecka 1.

$n=1$ $\quad A = a_{11}$, $\det A = a_{11}$

$n=2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

determinant-streck!

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $\qquad +$

$n=3$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{utveckla} \\ \text{efter} \\ \text{rad 1} \end{matrix} \right\}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

dvs

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

där A_{ij} matrisen där vi strukit rad i och kolonn j.

Obs: Fallet $n=2$ är även av denna form: $\det A = a_{11} \det \overset{1\times1}{A_{11}} - a_{12} \det \overset{1\times1}{A_{12}}$
$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Vi definierar $\det A$ <u>rekursivt</u> på detta vis för $n \geq 2$.

Def Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Då definieras $\det A$ av

1. a_{11} om $n=1$
2. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12}$ om $n=2$
3. $a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det A_{1n}$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \quad \text{om } n \geq 2.$$

Obs: $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Def $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ kallas (i,j)-kofaktorn till A.

Obs: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$

Sats 1 (i 3.1)
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$
för fixt i respektive j.

Dvs man kan utveckla efter godycklig rad (i) eller kolonn (j).

Utan bevis (krångligt).

Obs + eller − varannan gång enligt schemat

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \end{array} \qquad (-1)^{i+j}$$

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Utveckla efter kolonn 3 (många nollor):

$\det A = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} =$

$$= \underset{+}{0}\begin{vmatrix}2&4\\0&-2\end{vmatrix} + \underset{-}{3(-1)}\begin{vmatrix}1&5\\0&-2\end{vmatrix} + \underset{+}{0}\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix} = 6.$$

Sats 2 Låt A vara triangulär.

Då är $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Bevis Antag $a_{ij}=0$ om $i>j$ dvs övertriangulär. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{nn}\end{bmatrix}$

Utveckla efter kolonn 1:

$$\det A = a_{11}\det A_{11} = a_{11}\left(a_{22}\det (A_{11})_{11}\right)$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

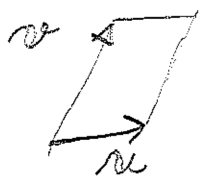
Undertriangulär determinant på samma vis. □

Geometrisk tolkning

Kryssprodukt i $\mathbb{R}^3$.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix} - j\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix} + k\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}$$

Area av parallellogram:



area $= |u \times v|$ (~~beloppet~~ längden av $u\times v$)

I planet: $u=(u_1,u_2,0)$, $v=(v_1,v_2,0)$

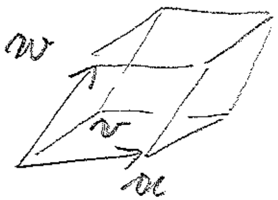
$$u\times v = k\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix} \quad \text{(längs z-axeln)}$$

$$\text{area} = \left|\det\begin{bmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{bmatrix}\right| = |u_1v_2 - u_2v_1|$$

$$= \left|\det\begin{bmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{bmatrix}\right| \quad \text{(beloppet av determinanten)}$$

Volym av parallellepiped:

$$\text{volym} = |(u \times v) \cdot w| =$$



$$= \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

= beloppet av trippelprodukten

= beloppet av determinanten.

$$= \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

Här har jag använt räkneregeln $\det A^T = \det A$, som vi kommer till strax.

Detta återkommer i Flervariabel-analys i lp 4.

Räkneregler för determinant.

Elementära radoperationer av tre slag.

1. rad i + $c \cdot$ rad j $\rightarrow$ rad i

Matris i 3×3:

$$\begin{array}{cc} E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \leftarrow i=2 \\ \quad\ \ \uparrow j=1 & \end{array}$$

2. Skalning: c rad i $\rightarrow$ rad i

Matris: $E_2 = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Permutation: rad j $\leftrightarrow$ rad i

Matris:

$$\begin{array}{cc} E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow i=2, j=3 \\ \quad\ \ \uparrow i=3, j=2 & \end{array}$$

Obs: $\det E_1 = 1$ (triangulär), $\det E_2 = c$

$\det E_3 = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

Detsamma gäller för $n \times n$.

Sats 3 (i 3.2)

Om E är matrisen för en elementär radoperation så gäller

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A = \alpha \det A$$

där $\alpha = -1, 1$, eller c beroende på typ av radoperation.

Utan bevis.

Vi kan alltid reducera A till trappstegsform med elementära radoperationer av typ 1 och 2 (ingen skalning behövs):

$$E_p \dots E_2 E_1 A = U$$

så att

$$\det A = (-1)^r \det U = (-1)^r u_{11} \cdots u_{nn}$$

där r är antalet radbyten och U är övertriangulär.

Enkelt!

Ex

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} (-2) =$$

determinant-streck

radbyte

$$= (-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} (1) = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 3. \quad \text{(utan skalning.)}$$

Med skalning: $= (-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1/3) \\ \\ (-1) \end{matrix} = (-1)\cdot 3 (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 3 \cdot (-1)$

Eftersom $u_{ii} \neq 0$ för alla i omm A är inverterbar så har vi

Sats 4 (i 3.2)

A är inverterbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Sats 5 (i 3.2) $\det A^T = \det A$.

Utan bevis.

Sats 6 (i 3.2)

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Utan bevis.

Cramers regel i 3.3

generaliserar Sats 4 i 2.2:

Sats 4 (i 2.2) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ är inverterbar om $\det A \neq 0$.

Då är

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Cramers regel utvidgar denna formel till $n \times n$.