

Idag: Egenvärden och egenvektorer.

Lay 5.1-5.2

Obs: Dugga 2 är öppen under vecka 5.

Obs: Fel i uppg. 6 ska vara  $F_2 = 8$  !!

Egenvärdesproblem  $Ax = \lambda x$

studerar vi för kvadratiske matriser  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

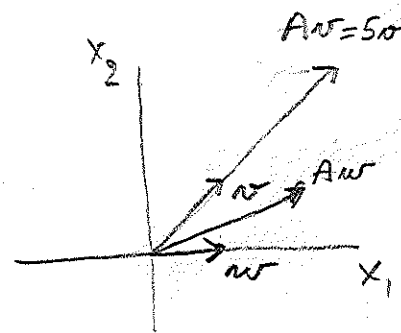
Ex  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ . Avbildning  $T: x \mapsto Ax$ .

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto Aw = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto Av = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5v$$

$v$  är speciell: avbildningen är endast skalning.

Kallas egenvektor till  $A$ .



Def Låt  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Om det finns  $x \in \mathbb{R}^n$ , med  $x \neq 0$ , och  $\lambda \in \mathbb{R}$  så att  $Ax = \lambda x$  så är  $\lambda$  ett egenvärde till  $A$  och  $x$  en egenvektor hörande till  $\lambda$ .

Obs: 1.  $x \neq 0$  men  $\lambda$  kan vara 0.

2.  $x$  egenvektor  $\Rightarrow cx$  också egenvektor.  
 $\begin{cases} c \neq 0, c \in \mathbb{R} \end{cases}$   
 dvs  $\infty$  många egenvektorer.

Att hitta egenvärden och egenvektorer kallas egenvärdesproblem.

Hur löser vi egenvärdesproblemet för  $A$ ?

Antag  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ . Då är  $Ax - \lambda x = 0$ , dvs  $(A - \lambda I)x = 0$  har inte-trivial lösning.

Metod: radreducera  $A - \lambda I$ .

Ex Gamma A.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 4-\lambda & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-(4-\lambda)/3} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 0 & -\frac{(4-\lambda)(2-\lambda)}{3} + 1 \end{bmatrix}$$

Take-trivial lösning om

$$-\frac{(4-\lambda)(2-\lambda)}{3} + 1 = 0 \text{ dvs } \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3 = 0$$

dvs  $\lambda = 1$  eller  $\lambda = 5$ .

Plätt in  $\lambda$  och lös  $(A - \lambda I)x = 0$ .

$$\text{Med } \lambda = 5: \begin{bmatrix} 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x_2 = t \text{ fri})$$

Alla  $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  är egenvektorer hörande till  $\lambda = 5$ .

$$\text{Med } \lambda = 1: \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$x = t \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ egenvektorer hörande till } \lambda = 1.$$

Def Om  $\lambda$  är egenvärde till  $A$  så kallas

$$\text{Nul}(A - \lambda I) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}$$

egenrummet hörande till  $\lambda$ .

Des. dimension kallas geometrisk multiplicitet av  $\lambda$ .

Obs Egenrummet innehåller även nollvektorn. Det är ett under rum till  $\mathbb{R}^n$ .

I exemplet: båda egenrummen är linjer genom origo, geometrisk multiplicitet = 1.

Ex  $A = I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  har eg. värde  $\lambda = 1$  och  $\text{Nul}(I - \lambda I) = \text{Nul}(\{0\}) = \mathbb{R}^2$ .

Geom. mult = 2 och alla  $x \neq 0$  är eg. vektorer.

Sats 1 (i 5.1) Låt  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vara triangulär. Då är diagonal-elementen egenvärden till  $A$ .

Bewis (för  $3 \times 3$ ). Antag över-triangulär.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{trappstegsmatrix!})$$

har icke-trivial lösning om det finns fria variabler. Detta händer om någon av diagonal-elementen  $a_{ii} - \lambda = 0$ , dvs  $\lambda = a_{ii}$ .  $\square$

Sats 2 Om  $v_1, \dots, v_r$  är egenvektorer hörande till distinkta egenvärden  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  så är  $\{v_1, \dots, v_r\}$  linjärt oberoende, dvs de är bas för ett  $r$ -dimensionellt underrum.

Bewis Antag motsatsen, dvs att någon vektor är linjär kombination av de andra. Låt  $p$  vara första index så att

$$v_{p+1} = c_1 v_1 + \dots + c_p v_p \quad \text{och} \quad \{v_1, \dots, v_p\} \text{ linjärt oberoende.}$$

Då har vi

$$\lambda_{p+1} v_{p+1} = c_1 \lambda_{p+1} v_1 + \dots + c_p \lambda_{p+1} v_p$$

och även  $\lambda_{p+1} v_{p+1} \stackrel{A v_k = \lambda_k v_k}{=} A v_{p+1} = A(c_1 v_1 + \dots + c_p v_p) = c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_p \lambda_p v_p$

$$\Rightarrow c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\alpha_1 + \dots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})\alpha_p = 0$$

$\Rightarrow$  alla  $c_k(\lambda_k - \lambda_{p+1}) = 0$  då  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  linj obero.

$\Rightarrow$  alla  $c_k = 0$  då  $\lambda_k \neq \lambda_{p+1}$  (distinkta)

$\Rightarrow \alpha_{p+1} = 0$  omöjligt!

□

### Karakteristiska ekvation (5.2)

$\lambda$ -egenvärde till  $A$

$\Leftrightarrow A - \lambda I$  singulär (ej inverterbar)

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

Kallas karakteristiska ekvationen för  $A$ .

Ex samma  $A$ .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-3)^2 - 9 + 5 = (\lambda-3)^2 - 4 = 0$$

$$\text{om } \lambda = 3 \pm 2 = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

Obs:  $\det(A - \lambda I)$  är polynom grad 2

$$\begin{aligned} \text{För } 3 \times 3: \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}-\lambda) \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}}_{\text{grad 2}} - a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}}_{\text{grad 1}} + a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\text{grad 1}} \\ &= \text{polynom av grad 3.} \end{aligned}$$

Allmänt: Om  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  så är  $\det(A - \lambda I)$  polynom av grad  $n$ .  
Det kallas det karakteristiska polynomet för  $A$ .

Ett polynom av grad  $n$  har precis  $n$  (komplexa) nollställen (rötter), dvs

$$\det(A - \lambda I) = c(\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

med  $n_1 + \dots + n_r = n$  och  $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, r$ , och  $\lambda_k$  distinkta.

Talet  $n_k$  är den algebraiska multipliciteten av  $\lambda_k$ .

Obs: geometriska mult.  $\leq$  alg. mult., men de behöver inte vara lika.

För varje distinkt eg. värde  $\lambda_k$  har vi ett egenrum

$$\text{Nul}(A - \lambda_k I).$$

Nytt villkor i Inversa matris-satsen.

Sats (sid 293)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  är inverterbar

$\Leftrightarrow \lambda = 0$  är inte egenvärde.

Bewis:  $\lambda = 0$  är eg. värde

$\Leftrightarrow Ax = 0$  har icke-trivial lösning  $x \neq 0$ .

$\Leftrightarrow A$  singular

Obs: Om  $\lambda \in \mathbb{C}$  är komplext är oftast även  $x$  komplex,  $x \in \mathbb{C}^n$ .

Vi ska se att ibland bildar egenvektorerna en bas för hela  $\mathbb{R}^n$ . Då blir det enklare att sätta in i den basen.