Idag: Diagonalisering av matris

5.2, 5.3

Ex 4 (i 5.2)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$ Matlab: eig(A) ger

$$\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = 2}_{\text{algebraisk multiplicitet } 2}, \quad \lambda_3 = 8.$$

Beräkna egenrummen.

Med $\lambda = 2$: $A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

Homogena ekv.: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$x_2 = t$, $x_3 = s$ fria, $x_1 = \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 = \frac{1}{2}t - 3s$

$$x = t\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linj ober.

Egenrummet är $E_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Geometrisk multiplicitet = 2.

Med $\lambda = 9$: $A - 9I = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Matlab: rref$(A - 9I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_3 = t$ fri, $x_1 = x_3 = t$, $x_2 = x_3 = t$

$$x = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenrummet är $E_9 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Vi kan bilda <u>egenvektormatrisen</u>

$$P = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{linj ober.} \\ \text{kolonner,} \\ \text{bas för } \mathbb{R}^3}}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = D$$

Matlab. — diagonal matris

Vi ska förklara dessa saker nu.

Def Två matriser A, B är <u>similära</u> om det finns inverterbar matris P så att $A = PBP^{-1}$.

Obs: $A = PBP^{-1} \iff P^{-1}AP = P^{-1}PBP^{-1}P = B$

$\iff AP = PD$ (den sista utan P^{-1})

<u>Sats 4</u> (i 5.2) Similära matriser har samma egenvärden.

<u>Bevis</u> Vi visar att de har samma karakteristiska ekvation.

$A = PBP^{-1}$, $A - \lambda I = PBP^{-1} - \lambda P P^{-1} = P(B - \lambda I)P^{-1}$

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(P(B-\lambda I)P^{-1}\right) =$$
$$= \det(P)\det(B-\lambda I)\det(P^{-1})$$
$$= \det(P)\det(P^{-1})\det(B-\lambda I)$$
$$= \underbrace{\det(PP^{-1})}_{=\det(I)=1}\det(B-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$$

$\square$

Här använde vi produktregeln $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

<u>Def</u> A är <u>diagonaliserbar</u> om den är similär med en diagonal matris, dvs $A = PDP^{-1}$ med $D = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix}$.

Detta gör det enkelt att beräkna vissa saker, t.ex. A^k med k stort:

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

där $D^2 = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn}^2 \end{bmatrix}$

På samma vis:

$A^k = PD^kP^{-1}$ med $D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn}^k \end{bmatrix}$.

Enkelt! Men $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ ggr}}$ jobbigt! $k \cdot n^2$ operationer

Sats 5 (i 5.3) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är diagonaliserbar omm A har n linjoberoende egenvektorer. I så fall är $A = PDP^{-1}$, där kolonnerna i P är dessa eg.vektorer och D är diagonal med motsvarande eg. värden.

Obs: då är egenvektorna en bas för $\mathbb{R}^n$.

Obs: $AP = PD \iff A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}AP$

Bevis Låt $P = [v_1, \dots, v_n]$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Om $\{v_1, \dots, v_n\}$ är linj. ober. med egenvärden $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ så är P inverterbar och

$$AP = A[v_1, \dots v_n] = [Av_1, \dots, Av_n] =$$

$$= [\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n] = PD \quad \text{dvs } AP = PD.$$

Omvänt: om $AP = PD$ så får vi

$$Av_k = \mathrm{col}_k(AP) = \mathrm{col}_k(PD) = \lambda_k v_k$$

så att $\{v_1, \dots, v_n\}$ är egenvektorer med $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ som egenvärden. De är linj ober. eftersom P är inverterbar. $\square$

Vi har redan sett att egenvektorer till distinkta egenvärden är linjärt oberoende. Om de är n stycken har vi en bas för $\mathbb{R}^n$ och A är diagonaliserbar:

Sats 6 Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ har n distinkta egenvärden så är den diagonaliserbar.

Kap. 7: Alla symmetriska A är diagonaliserbara

Metod (för $n \leq 3$ annars för jobbigt)

1. Bestäm egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ via $\det(A - \lambda I) = 0$. Obs: kan ha $r < n$, om multipla eg.v.

2. För varje λ_k bestäm en bas för dess egenrum E_{λ_k} dvs
   $B_k = \{v_1^k, \dots, v_{n_k}^k\}$
   Geometriska mult. är n_k.
   Om $\sum_{k=1}^{r} n_k < n$ så är A <u>inte</u> diagonaliserbar.
   Annars:

3. Bilda $P = [B_1, \dots, B_r]$, dvs alla egenvektorer bildar P.

4. Bilda $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_r \end{bmatrix}$, där varje λ_k upprepas lika många gånger som geometriska multipliciteten.

I vårt inledande exempel:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Koll:
$$AP = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{Matlab}}{=} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 \\ 2 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 \\ 2 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Matlab: `[P,D] = eig(A)` ger inte riktigt samma. Varför?

Tillämpning: lösa system av ODE.

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), & t > 0 \\ X(0) = b \end{cases}$$

$X(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonaliserbar

$AP = PD$

Byt koordinater:

$$x = Py$$

gamla koord i standardbasen; nya koord. i egenvektorbasen.

$$y = P^{-1}x$$

Vi får: $y'(t) = \left(P^{-1}x(t)\right)' = P^{-1}x'(t) =$

$$= P^{-1}Ax(t) = \underbrace{P^{-1}AP}_{=D}\underbrace{P^{-1}x(t)}_{=y(t)} = Dy(t)$$

Alltså: $y' = Dy$ <u>diagonalt system</u>

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

Obs: $x' = Ax$ är <u>kopplat system</u>

$$\Rightarrow \quad y_k'(t) = \lambda_k y_k(t) \Rightarrow y_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}$$

Transformera tillbaka:

$$x(t) = Py(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

Bestäm c_k genom att sätta in $x(0) = b$.

$$b = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$b = Pc$$

$$c = P^{-1}b$$

dvs c är b:s koord. i egenvektorbasen.

Enkelt om man använder egenvektorbasen! Kopplar isär ekvationerna. Kräver att A är diagonaliserbar.

Detta är ändå mest av <u>teoretiskt</u> värde: ger <u>förståelse</u>.

Verklig beräkning görs numeriskt.