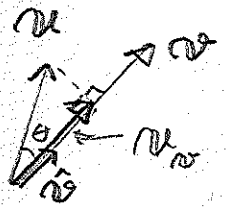


Idag: Ortogonalitet 6.1-6.2

Vi har redan använt skalärprodukt, längd, projektion för vektorer i rummet.

$$u \cdot v = |u| |v| \cos \theta$$

$$u_v = (u \cdot \hat{v}) \hat{v} = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$$


Vi ska nu göra samma för vektorer i \mathbb{R}^n och allmänna rum, t.ex. funktionsrum.

Skalärprodukt $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u \cdot v = u^T v = \sum_{i=1}^n u_i v_i = [u_1 \dots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Läs Sats 1 i 6.1! (De vanliga egenskaperna.)

Längd (norm)

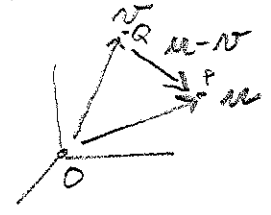
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}, \quad \|u\|^2 = u \cdot u$$

Obs: $\|c u\| = |c| \|u\|$ (om $c \in \mathbb{R}$)

Normera $\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}$ (om $u \neq 0$)

Avstånd $\text{dist}(u, v) = \|u - v\|$

dist(P, Q) = $\|\vec{PQ}\|$
 dvs avstånd mellan vektorer u, v resp. punkter P, Q.



ortogonala vektorer Vi säger att

$u \perp v$ om $u \cdot v = 0$.

Obs: 0 är ortogonal mot alla vektorer.

Sats 2 (Pythagoras sats)

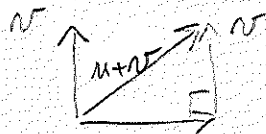
$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Beris $\|u+v\|^2 = (u+v) \cdot (u+v) =$

$= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v =$

$= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$

Vi ser att $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ om $u \cdot v = 0$.



(Vi ritar i planet men tänker i \mathbb{R}^n !)

ortogonalt komplement

Låt W vara underrum till \mathbb{R}^n .

$z \in \mathbb{R}^n$ är ortogonal mot W , $z \perp W$, om $z \cdot w = 0 \forall w \in W$. Mängden

$W^\perp = \{z \in \mathbb{R}^n : z \cdot w = 0 \forall w \in W\}$

kallas ortogonala komplementet till W . (Uttalas "W-ortogonal")

Obs: 1. W^\perp är ett underrum till \mathbb{R}^n .

$(\alpha z + \beta v) \cdot w = \alpha \underbrace{z \cdot w}_=0 + \beta \underbrace{v \cdot w}_=0 = 0$

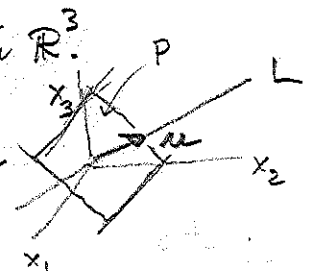
2. Räckes att kolla att z ortogonal mot en mängd spänner upp W .

Ex Linje genom origo i \mathbb{R}^3 .

$L = \text{span}\{u\}$

$L^\perp = P$ plan genom 0 med normal u

$P^\perp = L$



Hoppa över Sats 3.

6.2 Ortogonal mängd:

$S = \{u_1, \dots, u_p\}$ där vektorerna är ortogonala, dvs $u_i \cdot u_j = 0$ om $i \neq j$.

Ex $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2 &= 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \\ u_1 \cdot u_3 &= \dots = 0 \\ u_2 \cdot u_3 &= \dots = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{eller i matris:} \\ U = [u_1, u_2, u_3] \\ U^T U = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 66 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$S = \{u_1, u_2, u_3\}$ är en ortogonal mängd.

där alla $u_i \neq 0$

Sats 4 Om $S = \{u_1, \dots, u_p\}$ är en ortogonal mängd så är den linjärt oberoende, dvs en bas för $W = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$.

Beweis ^{Antag} $0 = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p$. Visa att alla $c_i = 0$.

Mult. med u_i :

$$0 \cdot u_i = c_1 \underbrace{u_1 \cdot u_i}_{=0} + \dots + c_i \underbrace{u_i \cdot u_i}_{=0} + \dots + c_p \underbrace{u_p \cdot u_i}_{=0}$$

$$\Rightarrow 0 = c_i u_i \cdot u_i \quad \text{ty } u_j \cdot u_i = 0, i \neq j$$

$$\Rightarrow c_i = 0 \quad \text{ty } u_i \cdot u_i = \|u_i\|^2 \neq 0. \quad \square$$

En ortogonal bas är en bas som också är en ortogonal mängd.

Ex Standardbasen $E = \{e_1, \dots, e_n\}$

där $e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{rad } j \text{ är ortogonal bas.}$

Följande sats visar att ortogonalbasen är mycket enkla att använda. Viktigt!

Sats 5 Låt $\{u_1, \dots, u_p\}$ vara en ortogonalbas för underrummet W .

Låt $y \in W$, dvs

$$y = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p.$$

Då ges koefficienterna av

$$c_i = \frac{y \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}.$$

Bewis Som i förra bewiset:

$$y \cdot u_i = c_1 \underbrace{u_1 \cdot u_i}_{=0} + \dots + c_i \underbrace{u_i \cdot u_i}_{\neq 0} + \dots + c_p \underbrace{u_p \cdot u_i}_{=0}$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{y \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}$$

□

Ex Ganna som förut. $\{u_1, u_2, u_3\}$ är ortogonal mängd, därför en bas för \mathbb{R}^3 enligt Sats 4.

Uttryck $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ denna bas.

Matlab:

$$u_1 \cdot u_1 = 11, \quad u_2 \cdot u_2 = 6, \quad u_3 \cdot u_3 = 66$$

Bara 6 tal att beräkna.

$$y \cdot u_1 = 11, \quad y \cdot u_2 = -12, \quad y \cdot u_3 = -66$$

Sats 5 ger: $y = \frac{11}{11} u_1 + \frac{-12}{6} u_2 + \frac{-66}{66} u_3$
 $= u_1 - 2u_2 - u_3$

Eller med transformationsmatrisen

$$U = [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$y = U c, \quad c = U^{-1} y$$

Inversen mycket lättare att beräkna.

$$\Rightarrow c = \text{inv}(U) \cdot y$$

$$\text{eller } c = A^{-1} y$$

Ortonormal mängd

$\{u_1, \dots, u_p\}$ kallas ortonormal om den är ortogonal och normerad.

Dvs

$$u_i \cdot u_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

Obs: $\|u_i\| = \sqrt{u_i \cdot u_i} = 1$ normerad.

Obs: En ortonormal mängd är en bas för $W = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$.

Kallas ortonormerad bas eller ON-bas. Även ortonormal bas.

Ex Samma som förut. $\forall i$
 normerar: $\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} u_1$
 $\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} u_2$
 $\hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{66}} u_3$
 viktigt att räkna för hand!
 Matlab!

Då fås $U = [\hat{u}_1 \ \hat{u}_2 \ \hat{u}_3]$ med ortonormerade kolonner.

Matlab: $U^T U = I \quad (\Rightarrow U^* U)$

Detta är Sats 6.

Sats 6 $U = [u_1, \dots, u_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ har ortonormala kolonner om

$$U^T U = I \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

Bewis $(U^T U)_{ij} = \sum_{k=1}^n u_{ik}^T u_{kj} = u_i^T u_j =$
 $= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = I. (p \times p)$
 skalärprod av u_i och u_j

Sloppa över Sats 7.

Ex Samma: $y = Ux \Rightarrow U^T y = \underbrace{U^T U}_{=I} x$
 $\Rightarrow x = U^T y$ dvs koordinatbyte är enkelt om ON-bas, ingen invers behövs.