Idag Först avslutar vi F18.
Sedan: Diagonalisering av symmetriska matriser. 7.1

Obs: Dugga 3 är öppen. VeckoPM 6 med Facit.

7.1 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk om $A^T = A$, dvs $a_{ij} = a_{ji}$, dvs rader och kolonner är lika.

Kom ihåg: A är diagonaliserbar om det finns $P, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ så att

$$A = PDP^{-1},\ D = P^{-1}AP,\ AP = PD.$$

Då är P egenvektor matrisen.

Vilka matriser är diagonaliserbara?
Finns inget bra svar, men alla symmetriska matriser är diagonaliserbara!!

Ex 2. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Man får den karakteristiska ekv. (Wolfram Alpha):

$$0 = -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144 = -(\lambda-8)(\lambda-6)(\lambda-3)$$

Lös $(A - \lambda I)x = 0$.

$\lambda = 8$: $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 6$: $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$: $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Obs: $\{v_1, v_2, v_3\}$ är en ortogonal mängd och alltså en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$.
Normera för att få en ortonormal bas:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Egenvektormatrisen:

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Egenvärdesmatrisen:

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi observerar: $P^T P = \left(v_i^T v_j \right) = I$

dvs $P^{-1} = P^T$. Enkelt!

Vi får: $A = PDP^T$

<u>Def</u> En matris $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ med $P^T P = I$, dvs med ortonormala kolonner, kallas <u>ortogonal matris</u>. (Borde väl kallas ortonormal matris, men icke.)

Kom ihåg: distinkta egenvärden ger linjärt oberoende egenvektorer. (Sats 3 i 5.1). Om $A^T = A$ har vi:

<u>Sats 1</u> Om A är symmetrisk så är egenvektorer från distinkta egenvärden ortogonala.

<u>Bevis</u> Antag $Av_1 = \lambda_1 v_1$ och $Av_2 = \lambda_2 v_2$ med $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Vi ska visa $\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^T v_2 = 0$.

Vi räknar:

$$\lambda_1 v_1^T v_2 = (\lambda_1 v_1)^T v_2 = (Av_1)^T v_2 = v_1^T A^T v_2 = v_1^T A v_2 = v_1^T (\lambda_2 v_2) = \lambda_2 v_1^T v_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_1^T v_2 = 0 \Rightarrow v_1^T v_2 = 0 \quad \square$$

För allmän matris kan egenvärden och egenvektorer vara komplexa. Men inte för symmetrisk matris.

Sats (ej i boken) En symmetrisk matris har endast reella egenvärden.

Vi hoppar över beviset (Exercise 24 i 5.5). Bygger på komplex skalärprodukt.

$$z=\alpha+i\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow |z|^2 = \bar{z} z = (\alpha - i\beta)(\alpha+i\beta) = \alpha^2+\beta^2.$$

$u, v\in \mathbb{C}^n$, vi definierar $\langle u,v\rangle =$

$$= \bar{v}^T u = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i u_i \in \mathbb{C}$$

$$\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = \bar{u}^T u = \sum_{i=1}^n |u_i|^2.$$

Obs: $\langle cu,v\rangle = c\langle u,v\rangle$, $\langle u, cv\rangle = \bar{c}\langle u,v\rangle$

$\langle v,u\rangle = \overline{\langle u,v\rangle}$

Sats 2 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ är ortogonalt diagonaliserbar $\iff A^T=A$.

Utan bevis.

Ex 3 $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$

$$0 = -\lambda^3+12\lambda^2-21\lambda-98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

$\lambda=7$ (algebraisk multiplicitet 2)

$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix}$, $E_7=\text{span}\{v_1,v_2\}$
geometrisk mult. $=2$

$\lambda=-2$, $v_3=\begin{bmatrix}-1\\-1/2\\1\end{bmatrix}$, $E_{-2}=\text{span}\{v_3\}$, geom. mult $=1$

Vi ser: $v_3^T v_1 = v_3^T v_2 = 0$ men $v_1^T v_2 = -1/2$.

Vi ortogonaliserar $\{v_1, v_2\}$: (Gram-Schmidt)

1. $w_1 = v_1$
2. $w_2 = v_2 - \dfrac{v_2^T w_1}{w_1^T w_1} w_1 = \begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix} - \dfrac{-1/2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/4\\1\\1/4\end{bmatrix}$

Då blir: $\{w_1, w_2, v_3\}$ en ortogonal bas av egenvektorer.

Om vi slutligen normerar så får vi en ortonormal bas..

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) & -2/3 \\ 0 & 4/(3\sqrt{2}) & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) & 2/3 \end{bmatrix}$$ är ortogonal matris.

$\|w_1\| = \sqrt{2}$, $\|w_2\| = \frac{\sqrt{18}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $\|v_3\| = \frac{2}{3}$.

Obs: $A = PDP^T = [P_1\ P_2\ P_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ P_3^T \end{bmatrix} =$

$= [\lambda_1 P_1\ \ \lambda_2 P_2\ \ \lambda_3 P_3] \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ P_3^T \end{bmatrix} =$

$= \lambda_1 (P_1 P_1^T) + \lambda_2 (P_2 P_2^T) + \lambda_3 (P_3 P_3^T)$

en summa av projektioner:

$P_i P_i^T$ är proj. på egenrummet $\text{span}\{P_i\}$.

Sats 3 (Spektralsatsen)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^T = A$

$\Rightarrow$

a) n reella egenvärden

b) den geometriska multipliciten $\dim(\text{Nul}(A - \lambda_i I)) = \dim(E_{\lambda_i})$ är lika med den algebraiska multipliciteten.

c) egenrummen E_{λ_i} och E_{λ_j} är ortogonala om $\lambda_i \neq \lambda_j$.

d) A är ortogonalt diagonaliserbar.

Obs: för allmän matris kan det hända att geom. mult. $<$ alg. mult., dvs det "fattas" egenvektorer. Ex. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$