Idag: Skalärprodukt (forts från F1)
10.3 Kryssprodukt

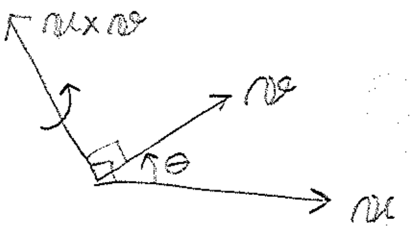
Def 5 Kryssprodukt

Kryssprodukten $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ är den unika vektor som bestäms av

(i) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{u}=0$, $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{v}=0$ (ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$)

(ii) $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\sin\theta$
där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$

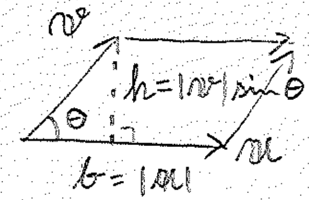
(iii) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ bildar ett höger-system.



(De tre villkoren bestämmer längd och riktning. Därför unik.)

Obs: finns bara i $\mathbb{R}^3$.

Obs: $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\sin\theta =$
= arean av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$:



$A = bh = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\sin\theta$

($\sin\theta \geq 0$ då $0 \leq \theta \leq \pi$)

Sats 2 Koordinatform för kryssprodukt

Låt $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$
$\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$
$\mathbf{w} = [u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1]$

Då är $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Bevis Kolla $\mathbf{w}$ uppfyller villkor (i), (ii), (iii).
Läs i boken!

Exempel
$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$ osv

Krånglig formel. Lätt att komma ihåg med hjälp av determinant.

Regler

$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ antikommutativ

$(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

$(t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

Obs: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

ej associativ, Problem 21.

Determinanter

(räkneschema)

2×2 determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \\ - & + \end{array}$$

3×3 determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ - & - & - & + + + & \end{array}$$

minnesregel

Alternativ: bryt ut a, b och c

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

(utveckling efter rad 1)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

underdeterminanter fås genom att stryka den rad och kolonn som hör till a, b, resp. c.

$\pm$ varannan gång

Exempel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

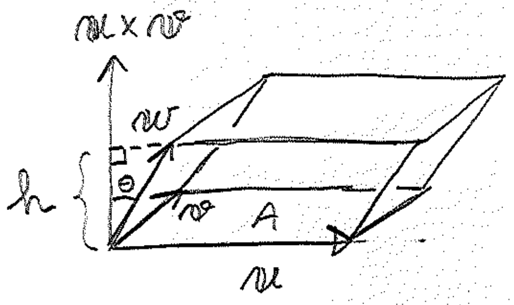
$$= 5 - 2\cdot 4 + 3\cdot(12-5) = \dots$$

Kryssprodukt som determinant

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Volym av parallellepiped som spänns upp av u, v, w.



(obs $\cos\theta$ kan vara <0)

$V = Ah$, $A = |u \times v|$, $h = |w||\cos\theta|$

$$V = |u \times v|\,|w||\cos\theta| = |(u \times w) \cdot w|$$

längd, belopp

V = beloppet av trippelprodukten

Skalära trippelprodukten

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$(u \times v) \cdot w = (w \times u) \cdot v = (v \times w) \cdot u$$

cyklisk permutation

$$(v \times u) \cdot w = -(u \times v) \cdot w \quad \text{ej cyklisk}$$