Idag: Matriser och vektorer, 1.3–1.5

Mål 1. Sambandet

LES $\Leftrightarrow$ vektorekvation $\Leftrightarrow$ matrisekvation

2. Linjär kombination

3. Använda (bevisa) Sats 4 i 1.4

Vektorer

Def En vektor i $\mathbb{R}^n$ är en ordnad lista av n tal.

Vi skriver

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

(Jag använder inte fetstil.)

Def (Räkneoperationer)

Låt $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, dvs $u, v \in \mathbb{R}^n$.

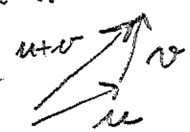
Likhet $\quad u = v$ om $u_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Addition $\quad u + v = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$

Multiplikation med skalär $\quad cu = \begin{bmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}$ $\quad (c \in \mathbb{R})$

Dvs detta görs elementvis.

Geometrisk tolkning i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$: geometriska vektorer



Räkneregler som för geom. vektorer se sid 43.

T.ex. $\quad u + v = v + u$

$0u = 0$ $\quad$ nollvektorn $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$u + 0 = u$

Def *Linjär kombination*

$$u = c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = \sum_{k=1}^{p} c_k v_k$$

är en linjär kombination av vektorerna $\{v_k\}_{k=1}^{p}$ med koefficienter (vikter) $\{c_k\}_{k=1}^{p}$.

Obs: $v_k \in \mathbb{R}^n$, dvs $v_k = \begin{bmatrix} v_{1k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{bmatrix}$.

Här vore det en fördel med fetstil som i boken, dvs

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbf{v}_k .$$

Jag använder ändå inte fetstil. Det bör framgå av sammanhanget vilket som är vektor (v_k) respektive skalär (c_k, v_{kj}).

Fråga Givet vektorer $v_1, \dots, v_p, b$ i $\mathbb{R}^n$, kan man skriva b som linj. komb. av $v_1, \dots, v_p$?

Ex (Lay ex. 5) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Kan vi skriva

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = b \text{ för några } c_1, c_2 ?$$

Dvs

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 7 \\ -2c_1 + 5c_2 = 4 \\ -5c_1 + 6c_2 = -3 \end{cases}$$

Detta är ett LES för c_1, c_2. Totalmatris:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right] \sim \text{radreducering} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dvs $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ och $b = 3v_1 + 2v_2$.

Mer allmänt:

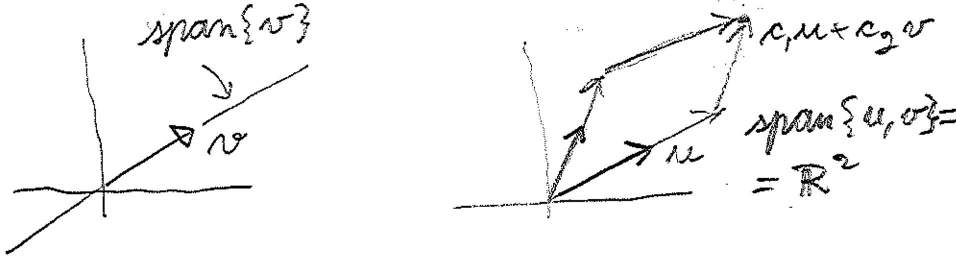
Vektorekvationen $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = b$ har samma lösningsmängd som ett LES med totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_p & b \end{bmatrix} \quad n \times (p+1).$$

Vektorn b är linj. komb av $v_1, \dots, v_p$ omm detta LES har en lösning.

Def Det linjära höljet av $\{v_k\}_{k=1}^{p}$ är mängden av alla linjärkombinationer av $\{v_k\}_{k=1}^{p}$. Mängden betecknas $\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_p\}$. Den spänns upp av $\{v_k\}_{k=1}^{p}$

Ex



Vår tidigare fråga $\iff$

Är $b \in \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_p\}$?

Matrisekvationen $Ax = b$ (1.4)

Def. Låt A vara en $m \times n$-matris med kolonner $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ låt $x \in \mathbb{R}^n$. Produkten av A med x är

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

dvs linjärkombination av kolonnerna med vikter x_k.

Ex $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 54 \\ 69 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{Vår tidigare fråga} \Leftrightarrow \text{Har } Ax=b \text{ en lösning?}}$

Sats 4 (i 1.4) Låt $A=[a_1 \dots a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Följande påståenden är ekvivalenta.

I. Ekvationen $Ax=b$ har lösning för <u>varje</u> $b \in \mathbb{R}^m$.

II. <u>Varje</u> $b \in \mathbb{R}^m$ är linj. komb. av $a_1, \dots, a_n$. ($b \in \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$)

III. A:s kolonner spänner upp $\mathbb{R}^m$ ($\text{span}\{a_1 \dots a_n\} = \mathbb{R}^m$)

IV. A har en pivotposition i varje rad. (A, inte $[A\ b]$)

Bevis I $\Leftrightarrow$ II $\Leftrightarrow$ III från def. IV $\Rightarrow$ I: genom radreducering $[A|b] \sim [U|d]$. Om IV sann så är $Ux=d$ lösbar för alla d och därmed också $Ax=b$ lösbar för alla b.

I $\Rightarrow$ IV: Om IV falsk så är sista raden i U bara nollor. Tag då $d = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och vi får ett inkonsistent system $Ux=d$. Då är också $Ax=b$ inkonsistent och I är falskt. $\square$

Obs: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1\ 2\ 3]\,x \\ [4\ 5\ 6]\,x \end{bmatrix} =$ $\xleftrightarrow{\text{rad}}$ $\updownarrow$ kolonn

Sats 5 (i 1.4)

$$A(u+v) = Au + Av$$
$$A(cu) = cAu$$

Bevis Skriv ut på elemtform.

Obs: Matris-vektormultiplikation är en linjär operation, dvs bevarar linjär kombination:

$$A(c_1v_1 + \dots + c_pv_p) = c_1Av_1 + \dots + c_pAv_p$$

Lösningsmängder (1.5)

Homogent LES: $Ax=0$

Obs: $x=0$ är lösning (trivial lösn)

Finns icke-triviala lösn $x \neq 0$?

Svar:

> $Ax=0$ har icke-triv lösn
> $\iff$ systemet har minst en fri variabel.
>
> (Sats 2 i 1.2)

Ex (ex 1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right]$ ~ reducera ~

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0x_3 = 0 \end{cases}$$

x_3 är fri, $x_3 = t$ parameter

$$\begin{cases} x_1 = +\frac{4}{3}t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} +4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linje genom origo

∞ många icke-triv. lösningar.

Inhomogent LES: $Ax = b$

Ex. samma A med $b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

Reducering: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_3 fri

konsistent!

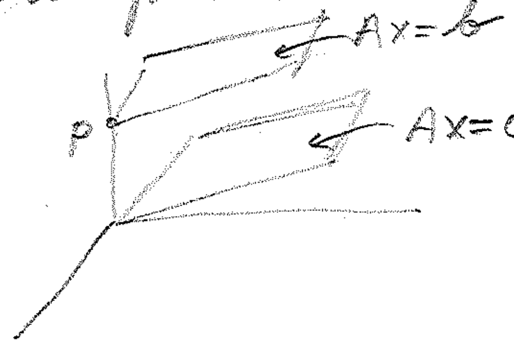
$$X = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}t \\ 2 \\ t \end{bmatrix} = \underset{\uparrow \atop p}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}} + t \underset{\uparrow \atop v}{\begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = p + tv$$

p = partikulärlösn. till $Ax = b$

$v_h = tv$ = allmän lösn till $Ax = 0$.

Sats 6 Antag $Ax = b$ är konsist med en lösning p. Då ges lösningsmängden av $v = p + v_h$, där v_h är en godtycklig lösning till det homogena systemet $Ax = 0$.

Obs: v_h innehåller en eller flera parametrar (fria variabler).



Två parametrar parallella plan.