Idag: Matrisalgebra.
Matrisräkning 2.1
Invers matris 2.2

Lite beteckningar: (Lay 2.1)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, matris av typ $m \times n$

$A = (a_{ij})$, element $a_{ij}$ på plats $(i,j)$, rad $i$, kolonn $j$. Även $a_{ij} = (A)_{ij}$.

$A = [a_1, \dots, a_n]$, kolonner $a_k \in \mathbb{R}^m$.

$0$ eller $0_{m\times n}$, nollmatrisen.

$I$ eller $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, identitetsmatrisen av typ $n\times n$, $(I)_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

Def. Låt $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ vara $m \times n$ matriser. Då är

* $A = B$ om $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i,j$
* $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
* $cA = (c\, a_{ij})$

Dvs elementvis. Obs: samma typ.

Ex. $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

Sats 1 De vanliga räknereglerna.

T.ex. $A + B = B + A$
$A + 0 = 0 + A = A$

Läs resten.

# Multiplikation.

Låt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $x \in \mathbb{R}^r$.

Då är

$Bx \in \mathbb{R}^n$, $A(Bx) \in \mathbb{R}^m$.

Men

$$Bx = x_1 b_1 + \dots + x_r b_r = x_1 \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} + \dots + x_r \begin{bmatrix} b_{1r} \\ \vdots \\ b_{nr} \end{bmatrix}$$

så

$$A(Bx) = x_1 A b_1 + \dots + x_r A b_r$$
$$= [Ab_1, \dots, Ab_r]x$$

Detta motiverar följande:

**Def** Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ så är produkten $AB \in \mathbb{R}^{m\times r}$ definierad av $AB = [Ab_1, \dots, Ab_r]$.

Obs: bara om typerna stämmer: $(m\times n)\cdot(n\times r) = m\times r$

Ex

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Rad-kolonn-regeln:

$$(AB)_{ij} = \mathrm{row}_i(A) \cdot \mathrm{col}_j(B) =$$

skalärprod

$$\left(\text{rad } i \,\middle|\, \text{kol}_j\right)$$

$$= [a_{i1}, \dots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Obs: $AB \neq BA$ i allmänhet, produkten är ej kommutativ. Om $BA = AB$ så säger vi att $A$ och $B$ **kommuterar**. (Då måste $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.)

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $(3\times 2)$, $B \doteq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $(2\times 3)$

Beräkna $AB$ och $BA$ i Matlab. Inte ens samma typ.

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Beräkna $AB = \begin{bmatrix} 9, & 12 \\ 19, & 26 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 19 & 28 \end{bmatrix}$.

Samma typ men inte lika

---

Potens $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (kvadratisk matris då $m=n$)

$$A^k = A \cdot A \cdots A, \quad k \text{ faktorer.}$$

Transponat $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ges av

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

Rader och kolonner byter plats.

Sats 2 Räkneregler. (om typerna stämmer!)

$$A(BC) = A(BC)$$

$$A(B+C) = AB + BC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

$$I_m A = A I_n \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n})$$

Läs bevis.

Sats 3 Transponat.

a. $(A^T)^T = A$

b. $(A+B)^T = A^T + B^T$

c. $(cA)^T = c A^T$

d. $(AB)^T = B^T A^T$

Bevis d: $\left((AB)^T\right)_{ij} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k (B^T)_{ik} (A^T)_{kj}$
$= B^T A^T$

## Matrisinvers 2.2

Vi har additiv invers:

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$

Multiplikativ invers:

**Def** En $n\times n$ matris $A$ är inverterbar om det finns matris $C$ så att

$$AC=CA=I.$$

I så fall är $C$ unik.

Vi skriver $C=A^{-1}$, inversen till $A$.

Alltså: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

$A$ är singulär om ej inverterbar.

**Sats 4**

Låt $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Om $ad-bc\neq 0$ så är $A$ inverterbar och

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Annars är $A$ singulär.

**Bevis** Multiplicera ihop:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=(ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resten i övn 25, 26.

---

Obs: Villkoret för inverterbarhet är $\det(A)=ad-bc\neq 0$.
Vi återkommer till detta i Kap. 3.

<u>Sats</u> 5 Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterterbar så har $Ax=b$ en unik lösning för alla $b \in \mathbb{R}^n$. Den ges av $x = A^{-1}b$.

<u>Bevis</u> Låt $b \in \mathbb{R}^n$ och sätt $x = A^{-1}b$. Då fås $Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$. Alltså har vi minst en lösning för varje $b$. Antag att det finns en annan lösning $y$, dvs $Ay = b$. Men då har vi $\underbrace{A^{-1}Ay}_{=y} = \underbrace{A^{-1}b}_{=x}$

dvs $y = x$. $\square$

<u>Sats 6</u> Egenskaper hos $A^{-1}$:

a. $A$ inverterterbar $\Rightarrow$ $A^{-1}$ inverterbar med $(A^{-1})^{-1} = A$.

b. $A, B$ inv. $\Rightarrow$ $AB$ inv. med $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

c. $A$ inv. $\Rightarrow$ $A^T$ inv. med $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

<u>Bevis b</u>: Kolla def. av invers:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{=I}B = B^{-1}B = I$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Läs resten i Lay.

Hur beräkna $A^{-1}$?

Svar: radreducera $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$.

Jag går igenom det imorgon.