

Idag: Vektorrum 4.1-4.2
underrum av \mathbb{R}^n 2.8

Mål: visa att man kan räkna i
andra mängder än \mathbb{R}^n .

4.1, 2.8 Vektorrum

Def Ett vektorrum V är en
icke-tom mängd av element
(kallade vektorer) som man
kan addera och multiplicera
med skalär. Följande räkne-
regler ska gälla:

1. $u, v \in V \Rightarrow u+v \in V$

2. $u+v = v+u$

3. $(u+v)+w = u+(v+w)$

4. $\exists 0 \in V$ så att $u+0 = u$

5. $\forall u \in V \exists -u \in V$ så att $u+(-u) = 0$

6. $u \in V, c \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow cu \in V$

7. $c(u+v) =$
 $= cu + cv$

8. $(c+d)u =$
 $= cu + du$

9. $c(du) = cd u$

10. $1u = u$

Vi har redan två exempel.

Ex $V = \mathbb{R}^n$ vektorer av dim. n

Ex $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ matriser av typ $m \times n$

Nytt exempel:

Ex $V = \mathcal{C}([0,1]) = \{ \text{alla kontinuerliga} \\ \text{funktioner } f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \}$.

Definition: addition $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

mult. med skalär $(cf)(x) = cf(x)$

dos definieras punktvis.

Håll villkoren:

Antag $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$, dos f, g är kontinuerliga.

Men då är $f+g$ kontinuerlig och
 cf är kontinuerlig. (Läsperiod 1)

Alltså: $f+g \in \mathcal{C}([0,1])$ och $cf \in \mathcal{C}([0,1])$.

Detta visar 1. och 6. Detta var lite
svårt (från lp1). Resten är enkelt.

T.ex. nollfunktionen $0(x) = 0 \forall x$.

Obs: 1. och 6. innebär att V är sluten under linjär kombination: $u, v \in V \Rightarrow$
 $\Rightarrow cu + dv \in V$
 Dvs man stannar kvar i V .
 Det är ofta det svåra att kolla.

Underrum (subspace)

Def Ett underrum av ett vektorrum V är en delmängd U av V ($U \subset V$) sådan att

1. $0 \in U$ (där 0 är nollvektorn i V)

2. $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$

3. $u \in U, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cu \in U$

(U är sluten under linj. komb.)

Obs: U är ett vektorrum!
 Varje $u \in U$ är också i V så villkoren följer direkt.
 T.ex. $u, v \in U \Rightarrow u + v = v + u$
 för detta gäller i V .

Triviala underrum:

- * $U = \{0\}$ bara nollvektorn
- * $U = V$ hela V

Ex \mathbb{R}^2 är ej underrum till \mathbb{R}^3 ,
 för \mathbb{R}^2 är ej delmängd av \mathbb{R}^3

Men $U = \left\{ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ är underrum
 av \mathbb{R}^3 , för $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$, $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$
 och $c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$ (U är sluten)

Ex Låt $v_1, \dots, v_p \in V$ och

$$U = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}.$$

Då är U ett underrum av V .

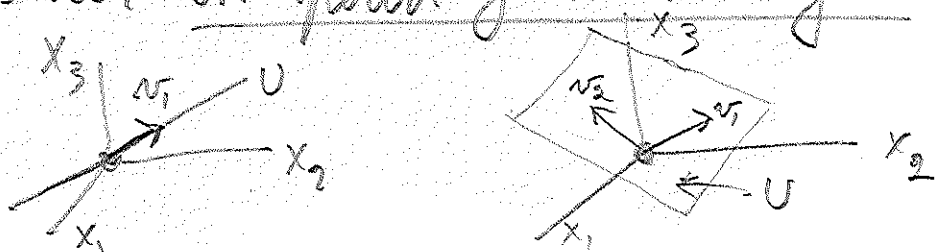
1. $0 \in U$, ty $0 = 0v_1 + \dots + 0v_p \in U$

2. $u = a_1v_1 + \dots + a_pv_p \in U$
 $w = b_1v_1 + \dots + b_pv_p \in U$

$$\Rightarrow u+w = (a_1+b_1)v_1 + \dots + (a_p+b_p)v_p \in U$$

3. $cu = (ca_1)v_1 + \dots + (ca_p)v_p \in U.$

ett typiskt underrum av \mathbb{R}^3
 är en linje genom origo
 eller ett plan genom origo.

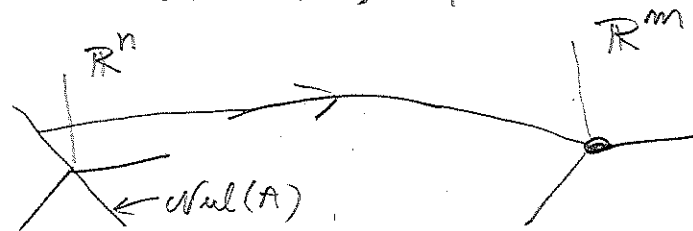


Sats 1 i 4.1 $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ är ett underrum av V .

Beweis: som i exemplet.

Viktigt underrum nr 1: nollrum.

Def $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, A :s nollrum
 är $\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$



Sats 2 i 4.2 $\text{Nul}(A)$ är underrum av \mathbb{R}^n .

Beweis

1. $A0 = 0$, så att $0 \in \text{Nul}(A)$
2. $u, v \in \text{Nul}(A) \Rightarrow Au = Av = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A(u+v) = Au + Av = 0 \Rightarrow u, v \in \text{Nul}(A)$
3. på samma vis

Obs * Lätt att testa om $v \in \text{Nul}(A)$:
beräkna Av .

* Svårt hitta $v \in \text{Nul}(A)$:
måste lösa $Av = 0$.

* $v \in \text{Nul}(A)$ är "homogen-
lösning" till $Ax = b$.

fås $Ax = 0$. Ikke-trivial lösning
fås på parameterform
med fria variabler som
parametrar. T.ex.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{=v_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{=v_2}$$

dos här är $\text{Nul}(A) = \text{span}\{v_1, v_2\}$

Ibland blir $\text{Nul}(A) = \{0\}$, dos bara
triviala lösningen.

Viktigt underrum nr. 2: kolonnrum

Def $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A = [a_1, \dots, a_n]$, $a_k \in \mathbb{R}^m$.

A 's kolonnrum är

$$\text{Col}(A) = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Sats 3 $\text{Col}(A)$ är underrum av \mathbb{R}^m .

Bewis. Sats 1.

Obs * Lätt att hitta en $v \in \text{Col}(A)$:
bilda en linj komb
 $v = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$.

* Svårt att testa om $v \in \text{Col}(A)$:
måste lösa $Ax = v$.

Obs * $\text{Nul}(A) \in \mathbb{R}^n$, $\text{Col}(A) \in \mathbb{R}^m$

* $\text{Col}(A)$ relaterad till existens av lösning.

- $v \in \text{Col}(A)$ om $Ax = v$ har partikulärlösning

- $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ om

$x \mapsto Ax$ är surjektiv

* $\text{Nul}(A)$ är relaterad till entydighet

- $v \in \text{Nul}(A)$ om v är homogenlösning

- $\text{Nul}(A) = \{0\} \Leftrightarrow x \mapsto Ax$ är injektiv

Om $m=n$ så får vi

Sats $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar om $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$ eller $\text{Nul}(A) = \{0\}$.

Linjära avbildningar

Def Låt V, W vara vektorrum.

En avbildning $T: V \rightarrow W$

är linjär om

$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$$

Ex $T: x \mapsto Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ är linjär från $V = \mathbb{R}^n$ till \mathbb{R}^m .

Def Kärnan av $T: V \rightarrow W$ är $\ker(T) = \{u \in V : T(u) = 0\}$ (kernel). Samma som $\text{Nul}(A)$ då $T: x \mapsto Ax$.

Def Värdemängden av $T: V \rightarrow W$ $\text{range}(T) = \{w \in W : w = T(v), v \in V\}$ jämför $\text{Col}(A)$.

Sats $\ker(T)$ är underrum av V
 $\text{range}(T)$ är underrum av W .

Ex Låt $V = \mathcal{C}^2([0,1]) = \{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R},$
 2 ggr kont. deriverbar $\}$

$$W = \mathcal{C}([0,1])$$

V, W är vektorrum

$D: V \rightarrow W$, $Df = f'$ (derivata)
 är linjär avbildning

Samma för $D^2: V \rightarrow W$,

$$D^2 f = f'' \quad (\text{andra-derivata})$$

T.ex. $f \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow Df \in \mathcal{C}$ och $D^2 f \in \mathcal{C}$
 (från lp 1)

$$\text{Även } D(f+g) = Df + Dg \quad \text{osv.}$$

Obs: $V = \mathcal{C}^2$ är underrum till $W = \mathcal{C}$.

Bilda $T: V \rightarrow W$

$$f \mapsto Tf = f'' + f$$

$f \in \ker(T)$ betyder

$$f'' + f = 0$$

$$\text{dvs } f(x) = A \cos x + B \sin x \quad (\text{lp 2})$$

$$\ker(T) = \text{span} \{ \cos, \sin \}$$

Motiverar andra typer av vektorrum än \mathbb{R}^n och andra T än $x \mapsto Ax$.

Här är V, W funktionsrum

dvs vektorrum av funktioner, och transformationen

$$T = D^2 + 1: V \rightarrow W, f \mapsto f'' + f, \text{ en}$$

differentialoperator. Ekv $Tf = 0$ är
 en differenialekvation.