MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 140116 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: John Bondestam Malmberg
0703-088304

TMV166/165 Linjär algebra M

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för $\operatorname{Col} A$. (2p)

(b) Bestäm en bas för $\operatorname{Nul} A$. (2p)

(c) Ange $\operatorname{rank} A$ och $\dim \operatorname{Nul} A$. (1p)

3. Låt $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, där $\mathbf{t} \neq 0$. Förklara varför $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t}$ *inte* är en linjär avbildning. (2p)

4. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -9 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden till A (2p)

(b) Bestäm alla egenvektorer till A. (2p)

(c) Är A diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera A. (2p)

Var god vänd!

5. (a) Definiera vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)

(b) Bestäm det andragradspolynom $p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ som är bäst anpassat till punkterna $(-1, 0), (0, -2), (1, -2), (2, 2)$ enligt minstakvadratmetoden. (4p)

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Låt $\mathbf{v}$ vara vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^2$, och låt $L = \operatorname{span}\{\mathbf{v}\}$ vara linjen som spänns upp av $\mathbf{v}$.

(a) Ta fram projektionen av vektorerna $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$ på linjen L. (2p)

(b) Om $\mathbf{p}$ är projektionen av en vektor $\mathbf{w}$ på L, så ges speglingen $\mathbf{s}$ av $\mathbf{w}$ kring L av $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{w}$. Ta fram speglingen av vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ kring linjen L. (1p)

(c) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som först speglar en vektor kring linjen L och sedan speglar kring x-axeln. Ta fram standardmatrisen för avbildningen T. (2p)

(d) Avbildningen T ovan kan beskrivas som en rotation. Vad är rotationsvinkeln? (2p)

7. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)

(a) Om A och B är $n \times n$-matriser, och B är inverterbar, så är $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

(b) En 3×3 matris har linjärt oberoende kolonner om och endast om den har linjärt oberoende rader (där raderna betraktas som kolonnvektorer).

(c) En 3×2 matris har linjärt oberoende kolonner om och endast om den har linjärt oberoende rader (där raderna betraktas som kolonnvektorer).

8. (a) Definiera vad som menas med att en mängd av vektorer är en ortogonal mängd och en ortonormal mängd. (2p)

(b) Bevisa att om $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ är en ortogonal mängd, så är $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ linjärt oberoende. (3p)

Lycka till!

Anonym kod	TMV166/165 Linjär algebra M 140116	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm för vilka h som vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & h \end{bmatrix}^T$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Skriv den allmänna lösningen till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm volymen av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^3$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Låt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ vara baserna $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\} = \{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T\}$ för $\mathbb{R}^2$. Antag att $\mathbf{v}$ har koordinaterna $(\mathbf{v})_\mathcal{B} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{B}$. Bestäm koordinaterna $(\mathbf{v})_\mathcal{C}$ för $\mathbf{v}$ i basen $\mathcal{C}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen $(2A + X)B^{-1} = I_2$ där I_2 är 2×2-enhetsmatrisen.

Lösning:

....

(f) Låt $W = \text{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, där $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 5\end{bmatrix}^T$. Ligger vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix}^T$ i W? (2p)

Lösning:

Svar: ....

Liten ordlista över linjär algebra. Se också Glossary i kursboken där kortfattad förklaring av termerna ges.

Engelskt ord	**Svenskt ord**
adjoint, adjugate	adjunkt, adjungerad matris
algorithm	algoritm, räkneschema
angle	vinkel
augmented matrix	totalmatris, utvidgad matris
auxiliary (equation)	hjälp(ekvation), ibl. karakteristisk ekvation
backward (phase)	bakåt (fas)
basic variable	bunden (ofri) variabel, basvariabel,
basis	bas
belongs to	tillhör
change of basis	basbyte
collinear (vectors)	parallella (vektorer)
column	kolonn
column space	kolonnrum
composition of linear transformations	sammansatt linjär avbildning
condition	villkor
condition number	konditionstal
consistent system	lösbart system
constraint	restriktion, villkor
dimension	dimension
distinct	distinkta, olika
domain	definitionsmängd
dot product	skalärprodukt
echelon (matrix)	trappstegs(matris)
eigenvalue, eigenvector	egenvärde, egenvektor
equivalent	ekvivalent, likvärdig
finite (dimensional)	ändligt (dimensionell)
forward (phase)	framåt (fas)
general solution	allmän lösning
homogeneous equation	homogen ekvation
identity matrix	enhets matris, identitets matris
if and only if	om och endast om
image	bild
inconsistent (system)	olösbart (system)
inner product	skalärprodukt
inverse, invertible	invers, inverterbar
kernel	kärna, nollrum
least-square (method)	minsta-kvadrat(-metoden)

linear combination	linjär kombination
linearly (in)dependent	linjärt (o)beroende
linear span	linjärt hölje
lower triangular	undre triangulär
mapping	avbildning, transformation
necessary (condition)	nödvändigt (villkor)
nonsingular (matrix)	inverterbar (matris), icke-singulär
nontrivial (solution)	icke-trivial (lösning)
null space	nollrum
one-to-one	injektiv (ev. en-entydig)
onto	surjektiv, på
orthonormal	ortonormerad
overdetermined system	överbestämt system
range	värdemängd
rank	rang
reduced echelon matrix	radkanonisk matris, reducerad trappstegsmatris
row space	radrum
satisfy	satisfiera, uppfylla
set	mängd
singular	icke-inverterbar, singulär
solution	lösning
solution set	lösningsmängd
span, linear span	(linjärt) hölje
spanning set	mängd som spänner upp, uppspännande mängd
submatrix	undermatris
subspace	underrum, delrum
sufficient condition	tillräckligt villkor
trace	spår
transfer matrix	överföringsmatris
transformation	transformation, avbildning
transpose	transponat
underdetermined system	underbestämt system
unique	entydigt bestämd
unit vector	enhetsvektor
upper triangular	övre triangulär
vector space	vektorrum, linjärt rum
weight	vikt
zero(vector)	noll(vektor)