TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom presentation av kryssuppgifter. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårlästa lösningar.

Lycka till!

Tony

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Ange en LU-faktorisering av matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Vi söker en övertriangulär matris U och en undertriangulär matris L med värdet 1 på diagonalen sådana att $A = LU$. Genom radreducering får vi direkt

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

där vi läser av U till höger. Genom att sätta in de två radoperationer vi utförde på rätt ställe i L, med omvänt tecken, får vi även

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se Lay för utförligare förklaring.

2. Med matrisen A från föregående uppgift, lös de båda ekvationssystemen (3p)

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad Ax = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Om man inte löst föregående uppgift får man radreducera två gånger. Annars skriver vi $Ax = b$ som två system $Ly = b$ och $Ux = y$ och utnyttjar att L och U är triangulära. För det första högerledet får vi direkt $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ vilket ger $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

För det andra högerledet får vi på liknande sätt $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ vilket ger $x = \begin{bmatrix} -1 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.

3. För vilka värden på a ligger $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$ i det plan som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$? (3p)

Lösning: Frågan är ekvivalent med när de tre vektorerna är linjärt beroende. För att undersöka detta sätter vi in vektorerna som kolonner i en matris A och tar reda på när $Ax = 0$ har några icke-triviala lösningar. Vi får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & a & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & a-12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 & 0 \end{array}\right],$$

dvs. vektorerna är linjärt beroende då och endast då $a = -3$.

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Bestäm $\det\left(A^3B^7\right)$. (3p)

Lösning: Vi utnyttjar räknereglerna för determinanter och får

$$\det\left(A^3B^7\right) = \det(A)^3\det(B)^7.$$

Eftersom $\det A = 4\cdot4-3\cdot2 = 10$ och $\det B = 1\cdot2-3\cdot1 = -1$ blir svaret $10^3(-1)^7 = -1000$.

5. Bestäm koordinaterna för $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ i basen $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. (3p)

Lösning: Koordinaterna $[x]_B$ definieras av $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}[x]_B = x$. Genom radreducering eller direkt beräkning av inversen till matrisen ovan får vi $[x]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

6. Ange en bas för nollrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Nollrummet är mängden av alla vektorer x sådana att $Ax = 0$. Alltså radreducerar vi återigen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Härur ser vi att alla lösningar ges av $x = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, där s är en fri parameter. En bas ges av t.ex. $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

7. MATLAB-koden >> **A = [1 2; 3 4; 4 6]; b = [1; 0; 0]; x = A\b;** körs utan problem. Löser den problemet $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$? Om ja, vad är x? Om nej, varför inte? (3p)

Lösning: Nej, problemet är överbestämt och ingen lösning existerar. Det MATLAB returnerar är en minstakvadrat-lösning, dvs. det x som minimerar $\|Ax - b\|$.

8. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm A^{12}. (3p)

Lösning: Kalla de båda vektorerna x och y. Genom att multiplicera A med dessa ser vi att $Ax = 1x$ och $Ay = -1y$, dvs. A:s egenvärden är 1 och -1. Med

$$V = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

så har vi

$$A = VDV^{-1}$$

och därmed

$$A^{12} = VD^{12}V^{-1} = VIV^{-1} = VV^{-1} = I,$$

där I är identitetsmatrisen.

9. För den linjära avbildningen T gäller att $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bestäm standardmatrisen för T. (3p)

Lösning: Låt standardmatrisen betecknas M. Den definieras av sambandet

$$T(x) = Mx \quad \text{för alla } x.$$

Med den givna informationen har vi alltså att

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

För att beräkna M inverterar vi matrisen till höger och multiplicerar den från höger med matrisen till vänster. Eftersom

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 0 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

får vi

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Låt A och B vara godtyckliga ortogonala matriser med samma dimensioner. Vilka av matriserna AB, BA och $A + B$ är då garanterat ortogonala? (3p)

Lösning:

Att A är ortogonal innebär att $A^T A = AA^T = I$. Om både A och B är ortogonala får vi att

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T B = I,$$

och även

$$(AB)(AB)^T = ABB^T A^T = AA^T = I.$$

Alltså är matrisen AB också ortogonal. Eftersom A och B är helt godtyckliga är även BA ortogonal, då vi bara har bytt namn på matriserna. Summan $A + B$ kan vara ortogonal i vissa specialfall, men i allmänhet är den *inte* ortogonal. Tag t.ex. $A = B = I$, vilket ger $A + B = 2I$, och $2I(2I)^T = 4I \neq I$.

11. Formulera och bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$. (5p)

Lösning:

Sats: Låt x och y vara två ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^n$. Då gäller att $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Bevis: Vi har att

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \big(x+y, x+y\big)\\ &= \big(x,x\big) + \big(x,y\big) + \big(y,x\big) + \big(y,y\big)\\ &= \|x\|^2 + 2\big(x,y\big) + \|y\|^2 .\end{aligned}$$

Eftersom x och y är ortogonala är $\big(x,y\big) = 0$ och satsen följer.

12. Låt A vara en nilpotent matris, dvs. det finns ett heltal $k \geq 0$ sådant att $A^{k+1} = 0$ (nollmatrisen) men $A^j \neq 0$ för $j = 0, 1, \ldots, k$.. Visa att då är (5p)

$$(I - A)^{-1} = I + A + \cdots A^k. \qquad (4p)$$

Använd detta för att beräkna $(I - A)^{-1}$ då $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. (1p)

Lösning: Vi verifierar att $I + A + \cdots A^k$ är inversen av $I - A$ genom att multiplicera från vänster och se att resultatet blir identitetsmatrisen:

$$\begin{aligned}(I + A + \cdots A^k)(I - A) &= I + A + \cdots A^k - A - A^2 - \cdots - A^k - A^{k+1}\\ &= I - A^{k+1}\\ &= I.\end{aligned}$$

enligt antagandet. Alltså är $(I + A + \cdots A^k)$ en vänsterinvers till $I - A$. Eftersom A måste vara kvadratisk om vi ska kunna bilda potenser av A så ger satsen om inverterbara matriser att det även är en högerinvers, och därmed en invers till $I - A$. (Alternativt kan man såklart även multiplicera från höger och verifiera att det är en högerinvers direkt.)

För den specifika matrisen $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ så observerar vi att $A^2 = 0$. Via sambandet ovan får vi alltså att

$$(I - A)^{-1} = I + A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. Ett fysikaliskt fenomen f förväntas vara linjärt: $f(x) = c_1 + c_2 x$. För att bestämma konstanterna c_1 och c_2 mättes värdet på f för olika x enligt nedan. (5p)

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	4	4

På grund av (stora) mätfel finns inget exakt linjärt samband. Hitta den bästa approximationen genom att

- Skriva problemet på matrisform $Ac = b$ (1p)
- Bestämma minstakvadrat-lösningen till detta system. (3p)

Räkna även ut minstakvadrat-felet. (1p)

Lösning: Matrisformen av problemet ges av

$$A = \begin{bmatrix} x^0 & x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad b = f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi ser direkt att systemet $Ac = b$ inte har någon lösning. Minstakvadrat-lösningen $\hat{c}$ erhålls som lösningen till normalekvationerna $A^T A\hat{c} = A^T b$, där

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T b = \begin{bmatrix} 9 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Inversen till $A^T A$ beräknas lätt till $\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$ och således får vi

$$\hat{c} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -30 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratfelet ges av

$$\|A\hat{c} - b\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{3/2}.$$

(Detta är 21% av $\|b\|$, dvs. mycket stort.)

14. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$. (5p)

- Skriv Q på (symmetrisk) matris-form. (1p)
- Undersök om Q är positivt definit, negativt definit eller indefinit genom att beräkna matrisens egenvärden. (3p)
- Om möjligt, hitta ett x och ett y så att $Q(x) > 0$ och $Q(y) < 0$. (Tips: använd det du vet om egenvärdena.)

Lösning: Vi har att

$$Q(x) = x^T Ax \quad \text{där} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena till A ställer vi upp den karakteristiska ekvationen:

$$0 = \det A - \lambda I = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Genom kofaktorexpansion längs tredje raden (eller kolonnen) och användning av formeln för determinanten av en 2×2-matris får vi snabbt att

$$\det A - \lambda I = (2-\lambda)\Big((2-\lambda)^2 - 4^2\Big)$$

Ett egenvärde är alltså 2 och genom att lösa $(2-\lambda)^2 = 4^2$ ser vi att de övriga egenvärdena är -2 och 6. Eftersom det finns både positiva och negativa egenvärden är den kvadratiska formen Q indefinit. Detta betyder att $Q(x)$ kan anta både positiva och negativa värden. Om x är en egenvektor till A med egenvärde λ får vi att $Q(x) = x^T Ax = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2$, där $\|x\|^2 > 0$. Låt oss därför hitta egenvektorerna tillhörande ett positivt och ett negativt egenvärde. För $\lambda = 2$ ser vi direkt att $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor. För $\lambda = -2$ löser vi $(A - \lambda I)y = 0$ via enkel radreducering och får $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (Kontrollera att $Q(x)$ blir positivt och $Q(y)$ blir negativt genom att sätta in i den ursprungliga definitionen.)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Tony Stillfjord
Telefonvakt: Olof Giselsson, ankn. 5325

TMV166 2016
2016–08–22 kl. 08:30–12:30 (SB Multisal)
Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		