TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom presentation av kryssuppgifter. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Tony

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Ange hur många lösningar följande ekvationssystem har: (3p)

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Om det finns precis en lösning, ange även denna.

Lösning: Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

dvs. ekvationssystemet har lösningen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning som uppfyller (3p)

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Bestäm a och b.

Lösning: Om T är linjär så gäller specifikt att $T(x+y) = T(x) + T(y)$. Eftersom $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ har vi alltså att

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix},$$

dvs. $a = b = 6$.

3. Bestäm $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ så att $AXB = C$, då (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Vi får att $X = A^{-1}CB^{-1}$ om inverserna existerar, vilket de gör. De bestäms enklast via formeln för 2×2-matriser, vilket ger

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Således blir

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Bestäm $\det(A^7) + \det(B^7)$ då (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Då B är samma matris som A förutom att första och andra raden bytt plats så får vi direkt att $\det B = -\det A$ och därmed $\det(A^7) + \det(B^7) = (\det A)^7 + (\det B)^7 = (\det A)^7 + (-1)^7(\det A)^7 = 0$. Alternativt kan man utnyttja t.ex. kofaktorexpansion längs första kolonnen för att beräkna

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2(10 - 8) = -4.$$

och $\det B = 4$ och därifrån dra samma slutsats. Observera att $\det A + \det B \neq \det(A + B)$.

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 3 & -6 & -3 & a \end{bmatrix}$. Bestäm de värden på a för vilka $\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Nul} A$. (3p)

Lösning: Enligt Rang-satsen vet vi att $\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = 4$ då A har 4 kolonner. Alltså måste vi ha $\dim \operatorname{Col} A = 4/2 = 2$, vilket innebär att två av kolonnerna i A måste vara linjärt oberoende. Men kolonn nr. 2 och 3 är båda multipler av kolonn nr. 1. För att inte kolonn nr. 4 också ska vara det krävs att $a \neq 9$.

Alternativt kan man såklart radreducera för att bestämma $\operatorname{Col} A$ explicit. Kravet för att den radkanoniska formen skall ha två pivotkolonner blir också $a \neq 9$.

6. Bestäm en ortogonal bas för $\operatorname{Nul} A$ då A är matrisen i föregående uppgift med $a = 10$. (3p)

Lösning: Radreducering ger

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 3 & -6 & -3 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dvs. en bas för $\operatorname{Nul} A$ ges av $b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dessa är inte ortogonala, så vi applicerar ett steg av Gram-Schmidts metod. Låt $v_1 = b_1$ och $v_2 = b_2 - \frac{b_2 \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} b_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Då är $\{v_1, v_2\}$ en ortogonal bas för $\operatorname{Nul} A$.

7. Ett plan i $\mathbb{R}^3$ har basen $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. Bestäm B-koordinaterna för $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: B-koordinaterna $[x]_B$ för x uppfyller $P_B[x]_B = x$, där $P_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & -11 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

dvs. $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

8. Låt linjen L i planet ges av riktningsvektorn $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ och låt $x = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T$. Bestäm $\operatorname{proj}_L x$ (den ortogonala projektionen av x på L) samt $\|x - \operatorname{proj}_L x\|$. (3p)

Lösning: Vektorn $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ utgör en bas för L. Den är givetvis ortogonal, då den består av endast en vektor. Således ges den ortogonala projektionen av x på L av

$$\operatorname{proj}_L x = \frac{x \bullet b}{b \bullet b} b = \frac{-1}{2} b = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Avståndet från x till projektionen ges av

$$\|x - \operatorname{proj}_L x\| = \left\| \begin{bmatrix} 7/2 \\ 7/2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(7/2)^2 + (7/2)^2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

9. För vilka värden på konstanterna a, b, c är den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_3^2$ positivt semi-definit? (3p)

Lösning: Med $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ har vi att $Q(x) = x^T A x$ där $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, och det gäller att Q är positivt semi-definit omm alla egenvärden till A är icke-negativa. Egenvärdena λ ges av

$$0 = \det(A - \lambda I) = (c - \lambda) \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = (c - \lambda)\big(-\lambda(a - \lambda) - b^2 \big),$$

så $\lambda = c$ är ett egenvärde. Detta ger direkt att $c \geq 0$. De övriga två ges av

$$0 = \lambda^2 - a\lambda - b^2 = \big(\lambda - \frac{a}{2}\big)^2 - \frac{a^2 + 4b^2}{4},$$

dvs.

$$\lambda = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Om $|b| > 0$ är $\sqrt{a^2 + 4b^2} > |a|$, vilket betyder att ett av egenvärdena är > 0 och det andra är < 0. Alltså får vi kravet $b = 0$. Då $b = 0$ ger formeln ovan egenvärdena 0 och a. Det sista kravet blir således $a \geq 0$.

10. Ge ett exempel på ett vektorrum V som inte är $\mathbb{R}^n$, och skriv ner hur addition definieras i detta rum. Dvs., vad betyder $u + v$ om $u, v \in V$? (3p)

Lösning: Vi kan t.ex. ta $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, alla reella funktioner. Om $u, v \in V$ definierar vi $u + v$ genom $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Ett annat exempel är $l^2 = \{u = (u_1, u_2, \ldots) \mid \sum_{j=1}^{\infty} u_j^2 < \infty\}$, med $(u + v)_j = u_j + v_j$, $j = 1, 2, \ldots$.

11. Låt W vara ett underrum av $\mathbb{R}^n$. (5p)

a) Definiera vad som menas med $W^\perp$, det ortogonala komplementet till W. (2p)

b) Antag att $n = 3$ och att vektorerna $b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ utgör en bas för W. Bestäm en bas för $W^\perp$. (3p)

Lösning:

a) Det ortogonala komplementet är alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot alla vektorer i W, dvs.

$$W^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \bullet x = 0 \quad \forall x \in W\}$$

b) Eftersom b_1 och b_2 är en bas för W så gäller att

$$W^\perp = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y \bullet b_1 = y \bullet b_2 = 0\}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och tre obekanta:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 1y_1 & - & 2y_2 & + & 1y_3 & = & 0 \\ 3y_1 & + & 2y_2 & + & 1y_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \end{array}\right],$$

dvs. det finns en fri variabel $y_3 = s$ och $W^\perp$ ges av linjen $y = s \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Alternativt kan vi utnyttja att vi alltid entydigt kan dela upp en godtycklig vektor $z \in \mathbb{R}^3$ som $z = x + y$ där $x \in W$ och $y \in W^\perp$. Då $\dim W = 2$ blir $W^\perp$ en linje. För att bestämma vilken linje så kan vi ta t.ex. $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Då b_1, b_2 är en ortogonal bas för W så är $x = \mathrm{proj}_W z = \frac{b_1 \bullet z}{b_1 \bullet b_1} b_1 + \frac{b_2 \bullet z}{b_2 \bullet b_2} b_2 = \frac{3}{14} b_1 - \frac{1}{6} b_2$. Därmed är $y = z - x = \cdots = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}$. Detta är riktningsvektorn för samma linje som vi fick fram ovan.

12. En permutationsmatris är en kvadratisk matris där varje rad och varje kolonn innehåller precis ett element med värdet 1, och alla övriga element är 0, t.ex. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (5p)

Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara en permuationsmatris.

a) Visa att determinanten av A bara kan anta två olika värden. Vilka? (1p)

b) Visa att A är en ortogonal matris (dvs. det som borde kallas ortonormal matris). (2p)

c) Visa att $\|Ax\| = \|x\|$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$. (1p)

d) Vad kan du via c) säga om egenvärdena till A? (1p)

Lösning:

a) Vi kan erhålla matrisen A från identitetsmatrisen genom att göra ett antal radbyten. Ett radbyte byter tecken på determinanten. Således blir $\det A = \pm 1$.

b) En ortogonal matris uppfyller $A^T A = AA^T = I$. Elementet på plats (r, k) i matrisen AA^T är skalärprodukten av rad r i A och kolonn k i A^T, dvs. rad k i A. Eftersom varje rad i A har precis ett icke-noll element, på olika positioner, så blir skalärprodukten av rad r och rad k noll såvida inte $r = k$. Men detta betyder ju att $AA^T = I$. Samma resonemang fungerar för $A^T A$, fast med kolonner istället för rader.

c) Vi har att

$$\|Ax\|^2 = (Ax)\bullet(Ax) = (Ax)^T Ax = x^T A^T Ax = x^T x = x\bullet x = \|x\|^2 .$$

d) Om λ är ett egenvärde så finns en vektor $x \neq 0$ sådan att $Ax = \lambda x$. Men enligt c) så är då $\|x\| = \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, dvs. $|\lambda| = 1$. Så alla (komplexa) egenvärden ligger på enhetscirkeln.

13. Låt ett fysikaliskt samband ges av $y = -Cx + Dx^3$ för två material-konstanter C och D. (5p)

Via experiment har följande data uppmätts:

x	-1	0	1	2
y	1	0	-2	3

a) Ställ upp ett linjärt ekvationssystem för C och D. (1p)

b) Visa att detta system inte har någon lösning. (1p)

c) Bestäm en minstakvadrat-lösning genom att ställa upp och lösa normalekvationerna. (2p)

d) Bestäm minstakvadrat-felet för den erhållna uppskattningen. (1p)

Lösning:

a) Ett linjärt ekvationssystem ges av $X \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = y$, där $X = \begin{bmatrix} -x & x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ och $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

b) T.ex. ger ekvation 1 att $C - D = 1$, men ekvation 3 ger att $C - D = 2$. Detta kan inte gälla samtidigt.

c) Normalekvationerna ges av $X^T X \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} = X^T y$. Vi får

$$X^T X = \begin{bmatrix} 6 & -18 \\ -18 & 66 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad X^T y = \begin{bmatrix} -3 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Radreducering ger

$$\left[\, X^T X \mid X^T y \,\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1/2 \\ -3 & 11 & 7/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1/2 \\ 0 & 2 & 4/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

dvs. minstakvadratuppskattningen ges av $\hat{C} = 5/2$ och $\hat{D} = 1$.

d) Minstakvadrat-felet ges av

$$\left\| X \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} - y \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

14. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ har endast egenvärdena 0 och 2. Diagonalisera A, eller ange varför det inte går. (5p)

Lösning: Matrisen A är diagonaliserbar om dess egenrum tillsammans spänner upp $\mathbb{R}^3$. Eftersom det endast finns två egenvärden så måste egenrummet för ett av dem i så fall vara tvådimensionellt. För att undersöka detta betraktar vi först $Ax = 2x$ för egenvärdet 2, dvs. $(A - 2I)x = 0$. Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

dvs. egenrummet E_2 till $\lambda = 2$ har dimension 1 och ges av $E_2 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Vidare har vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

dvs. egenrummet E_0 till $\lambda = 0$ har dimension 2 och ges av $E_0 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Vi kan alltså dra slutsatsen att A är diagonaliserbar. En diagonalisering ges av $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom egenvektorerna är linjärt oberoende behöver vi inte beräkna P^{-1} (fast den ges av $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$), men det är lämpligt att kontrollera att $AP = PD$ för att undvika räknefel.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Tony Stillfjord
Telefonvakt: Tim Cardilin, ankn. 5325

TMV166 2017
2017–06–08 kl. 08:30–12:30 (H)
Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		