Idag: 1.1 Geometriska vektorer
1.2 Vektor algebra
1.3 Skalärprodukt, projektion

Mål för kursen: lösa linjära ekvationssystem

$$Ax=b$$

Linjär algebra: räkna med matriser och vektorer.

Vecka 1: vektorer i rummet.

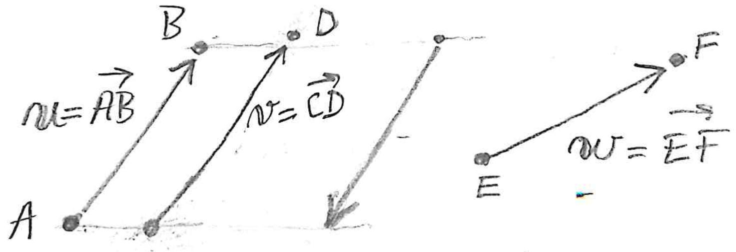
Def 1.1 Geometrisk vektor = riktad sträcka $u=\overrightarrow{AB}$.

Längd (magnitud) $|u|=|\overrightarrow{AB}|$ [m]

Likhet $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (parallellförflyttning)

Nollvektorn $0=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$

Motsatta vektorn $-u=\overrightarrow{BA}$



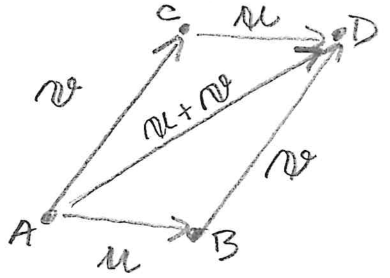
$u=v$ $\quad -u$ $\quad w\neq u$

Bestäms av längd och riktning, inte av läge.

Fysiska vektorer: exempel

- hastighet v, fart $v=|v|$ [m/s]
- kraft F, magnitud $F=|F|$ [N]

Def. 1.2 Addition



$u=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

$v=\overrightarrow{AC}=BD$

$u+v=\overrightarrow{AD}$

Subtraktion: $u-v=u+(-v)$

Sats 1.1 (regler)

$(u+v)+w = u+(v+w)$

$u+v = v+u$

$u+0 = u$

$u+(-u) = 0$

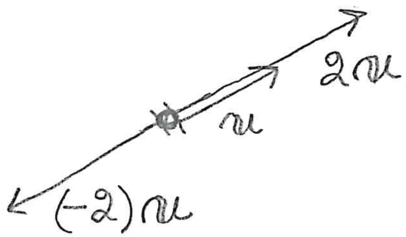
Bevis: se boken

Def 1.3 Multiplikation med skalär

Produkten tu bestäms av

- längden $|tu| = |t|\,|u|$
- riktning: parallell med u om $t>0$, antiparallell med u om $t<0$.

$t \in \mathbb{R}$, tal = skalär



Linjär kombination av u och v:

$$w = su + tv$$

Sats 1.2 (regler)

$t(u+v) = tu + tv$

$(t+s)u = tu + su$

$t(su) = (ts)u$

$1u = u$

$(-1)u = -u$

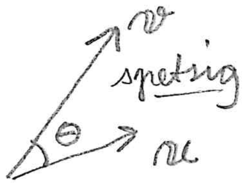
$0u = 0$

Bevis: problem 1.2.

Normera: om $u \neq 0$, $\hat{u} = \frac{1}{|u|}u = \frac{u}{|u|}$

$|\hat{u}| = 1$ enhetsvektor

Def 1.4 Skalärprodukt



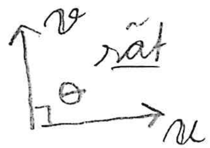
$$u \cdot v = |u|\,|v| \cos(\theta) \qquad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

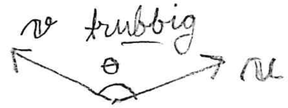
$u \neq 0$, $v \neq 0$:

spetsig $\Leftrightarrow u \cdot v > 0$

rät $\Leftrightarrow u \cdot v = 0$

trubbig $\Leftrightarrow u \cdot v < 0$





Sats 1.3 (regler)

$$u \cdot v = v \cdot u$$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \qquad (*)$$

$$(t u) \cdot v = t(u \cdot v) = u \cdot (t v)$$

$$u \cdot u = |u|^2$$

Bevis: enkelt utom distributiva (*).
Se nästa sida, 1.4.

Exempel 1.3 $|u| = 2$, $|v| = 3$, $\theta = \pi/3$

Beräkna $|u - 5v|$.
Utveckla kvadraten:

$$|u - 5v|^2 = (u - 5v) \cdot (u - 5v) =$$

$$= u \cdot u + u \cdot (-5v) + (-5v) \cdot u + (-5v) \cdot (-5v)$$

$$= u \cdot u - 10\, u \cdot v + 25\, v \cdot v$$

$$= |u|^2 - 10\, |u|\,|v| \cos(\theta) + 25\, |v|^2$$

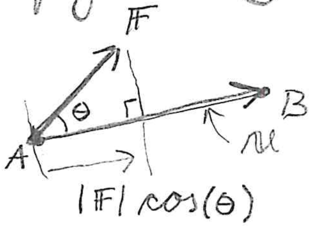
$$= 4 - 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} + 25 \cdot 9 = 199$$

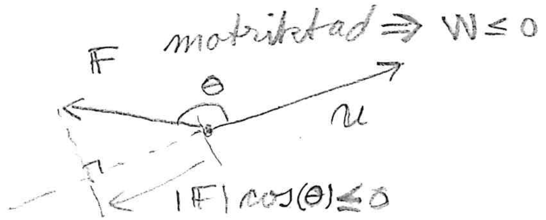
$$|u - 5v| = \sqrt{199}$$

Exempel 1.2 Arbete.

Kraft: $\mathbb{F}$ [N].

Förflyttning: $u = \vec{AB}$ [m]





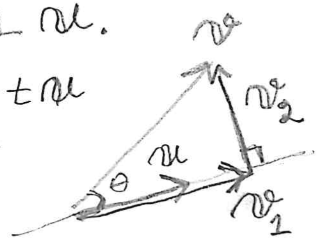
Arbetet: $W = |\mathbb{F}| \cos(\theta)\, |u| = \mathbb{F} \cdot u$ [J]

SI-enhet: joule = newtonmeter J

Exempel 1.5 Ortogonal uppdelning

(läs efter sid 1.4)

Antag $u \neq 0$. Unik uppdelning: $v = v_1 + v_2$ med v_1 parallell med u och $v_2 \perp u$.



Bevis: v_1 parallell med $u \Rightarrow v_1 = t u$ för något $t \in \mathbb{R}$. Bestäm t så att $v_2 = v - t u \perp u$, dvs

$$0 = (v - t u) \cdot u = v \cdot u - t\, u \cdot u$$

$$t = \frac{v \cdot u}{|u|^2}.$$

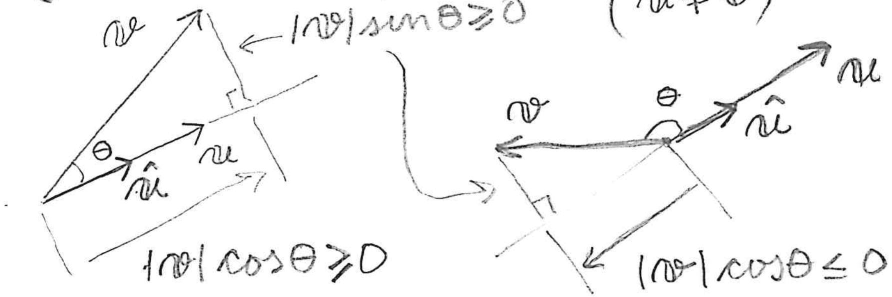
Alltså: $v_1 = t u = \dfrac{v \cdot u}{|u|^2} u = (v \cdot \hat{u})\hat{u} = \mathrm{proj}_u(v)$. $v_2 = v - \mathrm{proj}_u(v)$.

Def 1.5 Ortogonala vektorer

$$u \cdot v = 0$$

Obs: 0 är ortogonal mot alla.

Ortogonal projektion av v på u: $(u \neq 0)$

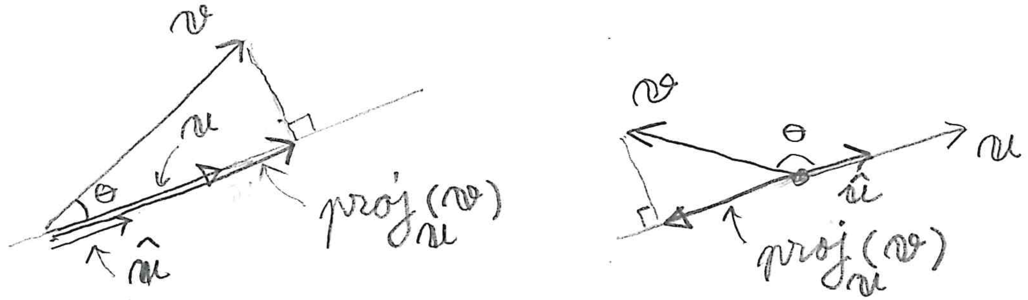


$$u \cdot v = |u|\,|v| \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow |v|\cos(\theta) = \frac{v \cdot u}{|u|} = v \cdot \frac{u}{|u|} = v \cdot \hat{u}$$

Def 1.6 Ortogonal projektion $(u \neq 0)$

- skalära projektionen $\operatorname{sproj}_u(v) = v \cdot \hat{u}$
- vektorprojektionen $\operatorname{proj}_u(v) = (v \cdot \hat{u})\hat{u}$



Bevis av distributiva lagen:

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad (*)$$

Här är
$$u \cdot v = |u| \operatorname{sproj}_u(v)$$
$$u \cdot w = |u| \operatorname{sproj}_u(w)$$
$$u \cdot (v + w) = |u| \operatorname{sproj}_u(v + w)$$

Men $\operatorname{sproj}_u(v+w) = \operatorname{sproj}_u(v) + \operatorname{sproj}_u(w)$

se figur. Det bevisar $(*)$.