

Idag: Bas och basbyte
4.3, 4.4, 4.7

Introduktion av datorövning
"Fackverk".

För $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ har vi

$$x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

där e_j är den j :te enhetsvektorn.

Vi kallar $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ en bas för $\mathbb{R}^n$ och $[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ koordinaterna för x i basen B . (Här är $[x]_B = x$, på grund av standardbasen.)

Mer allmänt har vi:

Def En bas för ett vektorrum V är en mängd $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ av linjärt oberoende vektorer som spänner upp V .

Koordinaterna för $x \in V$ i basen B är koefficienterna $[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, där $x = \sum_{j=1}^n c_j b_j$.

Obs 1: Koordinaterna är unika,

för $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = d_1 b_1 + \dots + d_n b_n$

$$\Rightarrow (c_1 - d_1) b_1 + \dots + (c_n - d_n) b_n = 0$$

B linj. ober.

$$\Rightarrow c_1 - d_1 = \dots = c_n - d_n = 0, \text{ dvs } d_j = c_j.$$

Obs 2: $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$,

ty B är linj. ober. och $\mathbb{R}^n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$.

Obs 3: Om $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ är linj. ober. så är den en bas för vektorrummet $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$.

en bas för V innehåller minsta tillräckliga information som beskriver V :

- * ta bort en vektor ur basen och vi kan inte nå hela V
- * lägg till en vektor så är de inte längre linj. ober.

Ex $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} = \{v_1, v_2\}$ är

bas för $\mathbb{R}^2$, ty

* $\text{span}\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^2$

Bewis. Tag $y \in \mathbb{R}^2$, sätt $A = [v_1 \ v_2]$ och lös $Ax = y$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 2 & 4 & y_2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & -2 & y_2 - y_1 \end{array} \right] \text{ har lösning!}$$

* linj. ober. Bewis: lös $Ax = 0$, unklösning $x = 0 \Rightarrow$ linj ober.

Ta bort v_2 : $\{v_1\}$ ej bas för $\mathbb{R}^2$, ty $\text{span}\{v_1\} \neq \mathbb{R}^2$
 Lägg till en annan vektor v_3 : $\{v_1, v_2, v_3\}$ är ej linj ober. ty $v_3 = v_1 + v_2$ ej bas.

Sats 5 (i 4.3) Låt $v_1, \dots, v_p \in V$ och sätt $U = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$. Om en v_j är linj komb. av de övriga så är även

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_p\} = U.$$

Om $U \neq \{0\}$ så är någon delmängd av $\{v_1, \dots, v_p\}$ en bas för U .

Utambewis.

Byte av bas i $\mathbb{R}^n$

$E = \{e_1, \dots, e_n\}$ kallas standardbasen för $\mathbb{R}^n$ och $[x]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Vad blir koordinaterna $[x]_B$ för x i en annan bas B ?

Def Låt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$. Koordinatbytes-
matrisen är

$$P_B = [b_1, \dots, b_n].$$

Då har vi $\begin{cases} c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [x]_B \\ x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = P_B c \end{cases}$

dvs

$$x = P_B [x]_B$$

gamla

nya koord.

För att gå åt andra hållet:

$$[x]_B = P_B^{-1} x.$$

(Varför är P_B inverterbar?)

Byte mellan två baser

Låt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ vara baser i $\mathbb{R}^n$.

Vi har då

$$P_B: [x]_B \mapsto x, \quad P_C^{-1}: x \mapsto [x]_C$$

så att

$$P_C^{-1} P_B: [x]_B \mapsto [x]_C$$

$$[x]_C = P_C^{-1} P_B [x]_B$$

Basbytes matrisen $P_C^{-1} P_B$ kan bestämmas med radreducering:

$$[P_C | P_B] = [c_1, \dots, c_n | b_1, \dots, b_n] \sim [I | P_C^{-1} P_B]$$

Ex Låt $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ vara två baser för $\mathbb{R}^2$.

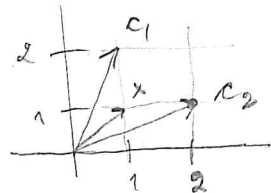
Vi har $P_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

och $P_B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $P_C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$P_C^{-1} P_B = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & +3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Eller med radreducering:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \end{array} \right] \\ = P_C^{-1} P_B.$$

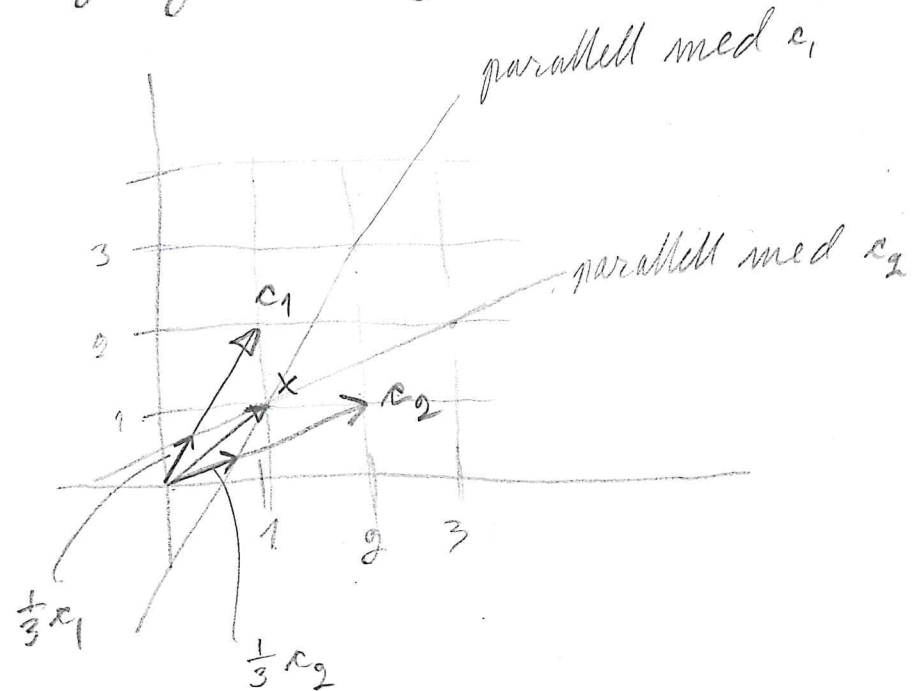


Testa: lag $[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, då är $x = P_B [x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 5 c-koordinater fås

$$[x]_C = P_C^{-1} x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{eller } [x]_C = P_C^{-1} P_B [x]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Tydligare figur:



Om rummet V inte är $\mathbb{R}^n$ men har en bas $\{b_1, \dots, b_n\}$ så finns ingen matris P_B . Men vi kan tala om koordinatavbildningen

$$\begin{aligned} x &\mapsto [x]_B \\ V &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Ex $V_5 = \{\text{alla polynom av grad högst 5}\}$. Om $p \in V_5$ så är $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5$.

Bilda $B = \{p_0, p_1, \dots, p_5\}$

där $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, \dots, p_5(x) = x^5$.

Linj. oberoende: $\kappa_0 p_0 + \dots + \kappa_5 p_5 = 0$
 $\Rightarrow \kappa_0 + \kappa_1 x + \dots + \kappa_5 x^5 = 0 \quad \forall x$
 $\Rightarrow \kappa_0 = \kappa_1 = \dots = \kappa_5 = 0$

Klart att $V_5 = \text{span}\{p_0, \dots, p_5\}$.
 Alltså: B är bas för V_5 .

Koordinatavbildningen är

$$p(x) = a_0 + \dots + a_5 x^5 \mapsto \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_5 \end{bmatrix} = [p]_B$$

$$V_5 \rightarrow \mathbb{R}^6$$

T.ex. $p(x) = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$

$$[p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Koordinatavbildningen låter oss identifiera V_5 med $\mathbb{R}^6$.

Sats 8 (i 4.4) Koordinatavbildningen

$T: x \mapsto [x]_B$ är linjär och inverterbar.
 $T: V \rightarrow \mathbb{R}^n$

(En sådan avbildning kallas isomorfism mellan vektorrummen V och $\mathbb{R}^n$.)

```
%% fackverk i veckoPM4
clear all

u=1/sqrt(2);
F=8;

A=zeros(6,6);           % börja med nollmatrix
A(:,1)=[u u -u -u 0 0]'; % fyll i element
A(:,3)=[0 0 u -u -u u]';
A(1,2)=1; A(5,2)=-1;
A(1,4)=-1; A(2,5)=-1; A(6,6)=-1;

b=zeros(6,1); b(4,1)=F;

Abreducerad=rref([A b])
x=inv(A)*b
xx=A\b
xx2=xx(2)

%% glest format
R = [1 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6]; % radpekare
K = [1 2 4 1 5 1 3 1 3 2 3 3 6]; % kolonnpekare
E = [u 1 -1 u -1 -u u -u -u -1 -u u -1]; % nollskilda element

AA = sparse(R,K,E,6,6) % 6x6 gles matrix
bb = sparse([4],[1],[8],6,1) % 6x1 gles matrix

%% inspektera matrisen i fullt format
spy(AA)
AAfull = full(AA)

%% lös ekv i glest format
xxx = AA\b
xxxfull = full(xxx)
AAbbreducerad = rref([AA bb])
AAbbreduceradfull = full(AAbbreducerad)
```