

Idag: Dimension och rang.
4.5, 2.8, 2.9

Vi har sett att om V har en bas $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ så är V isomorft med ("har samma linjära struktur som") $\mathbb{R}^n$.

Isomorfismen ges av koordinatavbildningen:

$$T: \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R}^n \\ v \mapsto [v]_B \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(skriver} \\ \text{även } V \cong \mathbb{R}^n) \end{matrix}$$

ex $V_5 = \{\text{polynom grad} \leq 5\}$

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5, \quad B = \{p_0, \dots, p_5\}$$

$$T: \begin{cases} V_5 \rightarrow \mathbb{R}^6 \\ p \mapsto [p]_B = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_5 \end{bmatrix} \end{cases} \quad p_k(x) = x^k$$

Verkar troligt att alla baser för V har n element, dvs lika många som $\mathbb{R}^n$.

Vi visar detta i två satser.

Sats 9 (i 4.5) Låt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas för V . Då är varje delmängd av V med fler än n element linjärt beroende.

(Dvs alla baser har max n element)

Beweis Låt $U = \{u_1, \dots, u_p\} \subset V$ med $p > n$. Vi har visat satsen för $\mathbb{R}^n$ (Sats 8 i 1.7). Alltså är koordinatvektorerne $\{[u_1]_B, \dots, [u_p]_B\}$ linj. beroende i $\mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow \exists \{c_k\}_{k=1}^p$ ej alla = 0 så att

$$0 = c_1[u_1]_B + \dots + c_p[u_p]_B = [c_1u_1 + \dots + c_pu_p]_B$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + c_p \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow c_1u_1 + \dots + c_pu_p = 0 \text{ (ej alla } c_k = 0)$$

$$\Rightarrow u_1, \dots, u_p \text{ linj. beroende} \quad \square$$

Sats 10 (i 4.5) Alla baser för V har lika många element.

Beweis Låt B och C vara baser.

Eftersom C är linj. ober. och B är bas så säger Sats 9 att

$$\#(C) \leq \#(B) \quad (\#(A) = \text{antalet element i } A)$$

Men vi kan låta B och C byta plats och får

$$\#(B) \leq \#(C).$$

$$\text{Alltså: } \#(B) = \#(C). \quad \square$$

Def Om V spänns upp av en ändlig mängd så är V ändlig dimensionellt, annars oändlig dimensionellt. I ändliga fallet är dimensionen för V $\dim V = \#(B)$, där B är en bas. I oändliga fallet: $\dim V = \infty$. Om $V = \{0\}$ är $\dim V = 0$.

Ex $\dim \mathbb{R}^n = n$

Ex $\dim V_5 = 6$

Ex $V = \{ \text{alla talföljder } \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \}$
 $= \{ (x_1, x_2, \dots) \}$

är vektorrum. Kolla detta:
 addition och multipl. med
 skalär termvis, se lp 1.

$\dim V = \infty$ ty alla vektorerna

$e_j = (0, \dots, \underset{\uparrow m_{rj}}{1}, \dots)$ behövs

för att spänna upp V .

V har ingen (ändlig) bas.

Ex Ett plan P i $\mathbb{R}^3$ spänns upp av
 2 vektorer $\Rightarrow \dim P = 2$
 En linje L av en vektor $\Rightarrow \dim L = 1$.

Obs: jag menar plan resp.
 linje genom origo, annars
 inte vektorrum.

Obs Om $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ så kan
 vi reducera till en bas genom
 att ta bort överflödiga vektorer
 (Sats 5 i 4.3)

Omvänt gäller:

Sats 11 (i 4.5) Varje mängd

av linj. ober. vektorer i ett
 underomrum U till V med $\dim V < \infty$
 kan utökas till en bas för U .
 Vi har då $\dim U \leq \dim V$.

Läs beviset.

Sats 12 (i 4.5)

Låt $\dim V = p$ och B en mängd med $\#(B) = p$. Då är B en bas för V om

1. B är linj. ober.

eller

2. B spänner upp V

Beweiside: 1. B kan utvidgas till bas med $\dim V = p$ utan att lägga till någon vektor enligt Sats 11.

2. B kan reduceras till B med $\dim V = p$ utan att ta bort någon vektor, enligt Sats 5.

Speciella underrum i $\mathbb{R}^n$.

Låt $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Bestäm en bas för

$$\text{Col}(A) = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$$

detta reducera $\{a_1, \dots, a_n\}$ till en linj. oberoende mängd.

Obs: $\{a_1, \dots, a_n\}$ linj. ober.

$$\Leftrightarrow Ax = 0 \text{ har bara triviala lösningar } x = 0.$$

Obs: Om $A \sim B$ så har $Ax = 0$ och $Bx = 0$ samma lösningar.

alltså: räcker lista med reducerad standardmatris.

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -2 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$

$$Bx = 0 \Leftrightarrow x = t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (x_3 = t \text{ fri variabel})$$

$$B = [b_1, b_2, b_3], \text{ välj } t=1, x_1=2, x_2=-3$$

Vi får ett linjärt samband:

$$2b_1 - 3b_2 + b_3 = 0 \text{ och } \{b_1, b_2\} \text{ linj obero.}$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 3a_2 + a_3 = 0 \text{ och } \{a_1, a_2\} \text{ linj obero.}$$

$$\Rightarrow \{a_1, a_2\} \text{ bas för } \text{Col}(A).$$

Generellt:

A 's pivotkolonner
är en bas för $\text{Col}(A)$

Obs: $\dim \text{Col}(A) = \text{antalet pivotelement}$

Vad gäller för $\text{Nul}(A) = \{x: Ax=0\}$?

Ex Samma A och B .

$$Ax=0 \Leftrightarrow Bx=0 \Leftrightarrow x = t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så att $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är bas för $\text{Nul}(A)$.

Generellt:

En bas för $\text{Nul}(A)$ fås
genom att skriva
lösningarna till $Ax=0$
på parameterform.

Obs: $\dim \text{Nul}(A) = \text{antalet}$
fria variabler.

Radrummet (hoppa över detta)

$\text{Row}(A) = \{ \text{alla linj. komb. av } A:s \text{ rader} \}$

Radreducering $A \sim B$ ger att varje rad i B är linj. komb. av rader i $A \Rightarrow$ raderna spannar samma rum

$\Rightarrow$ Om $A \sim B$ så är $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$.

Ex igen. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vi ser att raderna $[1 \ 0 \ -2]$ och $[0 \ 1 \ 3]$ i B är linj. ober., så raderna $\{[1 \ 0 \ -2], [0 \ 1 \ 3]\}$ är en bas för $\text{Row}(A)$.
(linj. ober. och spannar upp $\text{Row}(A)$.)

Generellt:

Om $A \sim B$ så är $B:s$ icke-noll rader en bas för $\text{Row}(A)$.

Obs: $\dim \text{Col}(A) = \dim \text{Row}(A)$
ty lika många icke-noll rader som pivotkolonner.

Rang (rank)

Def $\text{rank}(A) = \dim \text{Col}(A)$

Eftersom

$$\# \{ \text{bundna variabler} \} + \# \{ \text{fria} \} = n$$

$$\dim \text{Col}(A) + \dim \text{Nul}(A) = n$$

får vi följande sats:

Rangsatsen Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ så
gäller det att
 $\text{rank}(A) = \dim \text{Col}(A) = \dim \text{Row}(A)$

och
 $\text{rank}(A) + \dim \text{Nul}(A) = n$

Sats 8 i 2.3 om inverterbara
matriser kan nu formuleras
om enligt följande.

(obs att $m=n$ här)

Sats (sid 253)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar
om och endast om ett
av följande gäller.

1. A 's kolonner är en bas
för $\mathbb{R}^n$.
2. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$
3. $\dim \text{Col}(A) = n$
4. $\text{rank}(A) = n$
5. $\text{Nul}(A) = \{0\}$
6. $\dim \text{Nul}(A) = 0$

Obs: Rangsatsen
 $\underbrace{\text{rank}(A)}_{=n} + \underbrace{\dim \text{Nul}(A)}_{=0} = n$