Idag: Egenvärden och egenvektorer.
Lay 5.1–5.2

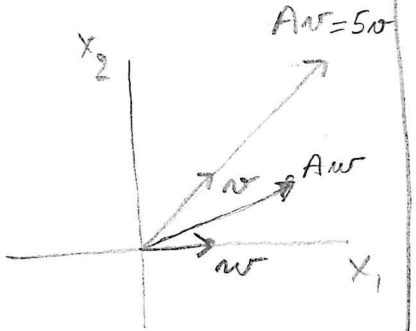
Obs: Dugga 2 är öppen under vecka 5.
Obs: Fel i uppg. 6: ska vara $F_2 = 8$!!

<u>Egenvärdesproblem</u> $Ax = \lambda x$ studerar vi för <u>kvadratiska</u> matriser $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

<u>Ex</u> $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Avbildning $T: x \mapsto Ax$.

$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto Aw = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto Av = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5v$



v är speciell: avbildningen är endast skalning.
Kallas <u>egenvektor</u> till A.

<u>Def</u> Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Om det finns $x \in \mathbb{R}^n$, med $x \neq 0$, och $\lambda \in \mathbb{R}$ så att $Ax = \lambda x$ så är λ ett <u>egenvärde</u> till A och x en <u>egenvektor</u> hörande till λ.

<u>Obs:</u> 1. $x \neq 0$ men λ kan vara 0.

2. $\left\{\begin{array}{l} x \text{ egenvektor} \\ c \neq 0,\ c \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow cx$ också egenvektor
dvs ∞ många egenvektorer.

Att hitta egenvärden och egenvektorer kallas <u>egenvärdesproblem</u>.

Hur löser vi egenvärdesproblemet för A?

Antag $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Då är $Ax - \lambda x = 0$, dvs $(A - \lambda I)x = 0$ har <u>icke-trivial</u> lösning.

Metod: radreducera $A-\lambda I$.

Ex Samma A.

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 4-\lambda & 1 \end{bmatrix} \cdot (-(4-\lambda)/3) \sim \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 0 & -\frac{(4-\lambda)(2-\lambda)}{3}+1 \end{bmatrix}$$

Icke-trivial lösning omm

$$-\frac{(4-\lambda)(2-\lambda)}{3}+1=0 \quad \text{dvs} \quad \lambda^2-6\lambda+8-3=0$$

dvs $\lambda=1$ eller $\lambda=5$.

Sätt in λ och lös $(A-\lambda I)x=0$.

Med $\lambda=5$: $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{cases} 3x_1-3x_2=0 \\ 0=0 \end{cases}$ $(x_2=t \text{ fri})$

$$\Rightarrow x=\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alla $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är egenvektorer hörande till $\lambda=5$.

Med $\lambda=1$: $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{cases} 3x_1+x_2=0 \\ 0=0 \end{cases}$

$x=t\begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ egenvektorer hörande till $\lambda=1$.

Def Om λ är egenvärde till A så kallas

$$E_\lambda = Nul(A-\lambda I) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax=\lambda x\}$$

egenrummet hörande till λ.

Dess dimension kallas geometriska multipliciteten av λ.

Obs Egenrummet innehåller även nollvektorn. Det är ett underrum till $\mathbb{R}^n$.

I exemplet: båda egenrummen är linjer genom origo, geometrisk multiplicitet $=1$.

Ex $A=I\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ har eg.värde $\lambda=1$ och $Nul(I-\lambda I)=Nul(\{0\})=\mathbb{R}^2$.

Geom. mult $=2$ och alla $x\neq 0$ är eg.vektorer

<u>Sats 1</u> (i 5.1) Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara <u>triangulär</u>. Då är diagonalelementen egenvärden till A.

<u>Bevis</u> (för 3×3). Antag övertriangulär.

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}$$ (trappstegsmatris!)

har icke-trivial lösning omm det finns fria variabler. Detta händer omm något av diagonalelementen $a_{ii}-\lambda=0$, dvs $\lambda = a_{ii}$. □

<u>Sats 2</u> Om $v_1, \dots, v_r$ är egenvektorer hörande till <u>distinkta</u> egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, så är $\{v_1, \dots, v_r\}$ linjärt oberoende, dvs de är <u>bas</u> för ett <u>r-dimensionellt underrum</u>.

<u>Bevis</u> Antag motsatsen, dvs att någon vektor är linjär kombination av de andra. Låt p vara <u>första</u> index så att

$v_{p+1} = c_1 v_1 + \dots + c_p v_p$ och

$\{v_1, \dots, v_p\}$ linjärt oberoende.

Då har vi

$$\lambda_{p+1} v_{p+1} = c_1 \lambda_{p+1} v_1 + \dots + c_p \lambda_{p+1} v_p$$

och även

$$\lambda_{p+1} v_{p+1} \overset{Av_k=\lambda_k v_k}{=} A v_{p+1} = A(c_1 v_1 + \dots + c_p v_p) = c_1\lambda_1 v_1 + \dots + c_p \lambda_p v_p$$

$\Rightarrow c_1(\lambda_1-\lambda_{p+1})v_1+\dots+c_p(\lambda_p-\lambda_{p+1})v_p=0$

$\Rightarrow$ alla $c_k(\lambda_k-\lambda_{p+1})=0$ ty $\{v_1,\dots,v_p\}$ linj ober.

$\Rightarrow$ alla $c_k=0$ ty $\lambda_k\neq\lambda_{p+1}$ (distinkta)

$\Rightarrow v_{p+1}=0$ omöjligt! $\square$

Karakteristisk ekvation (5.2)

λ egenvärde till A

$\Leftrightarrow A-\lambda I$ singulär (ej inverterbar)

$\Leftrightarrow \det(A-\lambda I)=0$

Kallas karakteristiska ekvationen för A.

Ex Samma A.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 1\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)-3=$$

$$=\lambda^2-6\lambda+5=(\lambda-3)^2-9+5=(\lambda-3)^2-4=0$$

omm $\lambda=3\pm2=\begin{cases}5\\1\end{cases}$

Obs: $\det(A-\lambda I)$ är polynom grad 2

För 3×3: $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(a_{11}-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix}a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}}_{\text{grad 2}}-a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}}_{\text{grad 1}}+a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}-\lambda\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}}_{\text{grad 1}}$$

$=$ polynom av grad 3.

Allmänt: Om $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ så är $\det(A-\lambda I)$ polynom av grad n.

Det kallas det karakteristiska polynomet för A.

Ett polynom av grad n har precis n (komplexa) nollställen (rötter), dvs

$$\det(A-\lambda I) = c(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

med $n_1+\dots n_r = n$ och $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k=1,\dots,r$, och λ_k distinkta.

Talet n_k är den <u>algebraiska multipliciteten</u> av λ_k.

Obs: geometriska mult. $\leq$ alg. mult., men de behöver inte vara lika.

För varje distinkt eg. värde λ_k har vi ett egenrum $E_{\lambda_k} = \mathrm{Nul}(A-\lambda_k I)$.

Nytt villkor i Inversa matrissatsen:

<u>Sats</u> (sid 293)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar $\iff \lambda=0$ är <u>inte</u> egenvärde.

<u>Bevis</u>: $\lambda=0$ är eg. värde

$\iff Ax=0$ har icke-triv. lösn. $x\neq 0$.

$\iff A$ singulär

Obs: Om $\lambda\in\mathbb{C}$ är komplext är oftast även x komplex, $x\in\mathbb{C}^n$.

Vi ska se att ibland bildar egenvektorerna en bas för hela $\mathbb{R}^n$. Då blir det enklare att räkna i den basen