Idag: Diagonalisering av matris

5.2, 5.3

Ex 4 (i 5.2)

$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Matlab: eig(A) ger

$\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = 2}_{\text{algebraisk multiplicitet } 2}, \ \lambda_3 = 9.$

Beräkna egenrummen.

Med $\lambda = 2$: $A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

Homogena ekv.: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right]$ (-1) (-1) $\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$x_2 = t$, $x_3 = s$ fria, $x_1 = \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 = \frac{1}{2}t - 3s$

$x = t\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ linj ober.

Egenrummet är $E_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Geometrisk multiplicitet = 2.

Med $\lambda = 9$: $A - 9I = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Matlab: rref$(A - 9I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_3 = t$ fri

$x = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ linj ober. av E_2 enl. Sats 2, distinkta λ.

Egenrummet är $E_9 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Vi kan bilda <u>egenvektormatrisen</u>

$P = \begin{bmatrix} 1/2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\underbrace{P^{-1}AP}_{\text{Matlab.}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = D$ diagonal matris

linj ober. kolonner, bas för $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ P inverterbar $\boxed{[P,D] = \text{eig}(A)}$

Vi ska förklara dessa saker nu.

<u>Def</u> Två matriser A, B är <u>similära</u> om det finns inverterbar matris P så att $A = PBP^{-1}$.

Obs: $A = PBP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = B$

Sats 4 (i 5.2) Similära matriser har samma egenvärden.

Bevis Vi visar att de har samma karakteristiska ekvation.

$A = PBP^{-1}$, $A - \lambda I = PBP^{-1} - \lambda P P^{-1} = P(B - \lambda I)P^{-1}$

$\det(A-\lambda I) = \det\left(P(B-\lambda I)P^{-1}\right) =$

$= \det(P)\det(B-\lambda I)\det(P^{-1})$

$= \det(P)\det(P^{-1})\det(B-\lambda I)$

$= \underbrace{\det(PP^{-1})}_{=\det(I)=1}\det(B-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$

$\square$

Här använde vi produktregeln:

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Def A är diagonaliserbar om den är similär med en diagonal matris, dvs $A = PDP^{-1}$ med $D = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix}$.

Detta gör det enkelt att beräkna vissa saker, t.ex. A^k med k stort:

$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} =$

$= PD^2P^{-1}$

där $D^2 = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn}^2 \end{bmatrix}$

På samma vis:

$A^k = PD^kP^{-1}$ med $D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn}^k \end{bmatrix}$.

Enkelt! Men $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ ggr}}$ jobbigt! $k \cdot n^2$ operationer

Sats 5 (i 5.3) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är diagonaliserbar omm A har n linj. oberoende egenvektorer. I så fall är $A = PDP^{-1}$, där kolonnerna i P är dessa eg.vektorer och D är diagonal med motsvarande eg.värden.

Obs: då är egenvektorna en bas för $\mathbb{R}^n$.

Obs: $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$

Bevis Låt $P = [v_1, \dots, v_n]$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Om $\{v_1, \dots, v_n\}$ är linj. ober. med egenvärden $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ så är P inverterbar och

$$AP = A[v_1, \dots v_n] = [Av_1, \dots, Av_n] =$$

$$= [\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n] = PD$$ dvs $AP = PD$ och $A = PDP^{-1}$, dvs A diagonaliserbar.

Omvänt: Om $A = PDP^{-1}$, så har vi $AP = PD$ så att

$$Av_k = \mathrm{col}_k(AP) = \mathrm{col}_k(PD) = \lambda_k v_k$$

Alltså: $\{v_1, \dots, v_k\}$ är egenvektorer med $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ som egenvärden. De är linj. ober. eftersom P är inverterbar. □

Vi har redan sett att egenvektorer till distinkta egenvärden är linjärt oberoende. Om de är n stycken har vi en bas för $\mathbb{R}^n$ och A är diagonaliserbar:

Sats 6 Om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ har n distinkta egenvärden så är den diagonaliserbar ...

__Metod__ (för $n \le 3$ annars för jobbigt)

1. Bestäm egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ via $\det(A - \lambda I) = 0$. Obs: vi kan ha $r < n$, om multipla eg.v.

2. För varje λ_k bestäm en bas för dess egenrum E_{λ_k} dvs $B_k = \{v_1^k, \dots, v_{m_k}^k\}$

Geometriska mult. är m_k.

Om $\sum_{k=1}^{r} m_k < n$ så är A __inte__ diagonaliserbar (det "fattas" eg.vektorer).

Annars:

3. Bilda $P = [B_1, \dots, B_r]$, dvs alla egenvektorer bildar P.

4. Bilda $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ 0 & & & \ddots \lambda_n \end{bmatrix}$, där varje λ_k upprepas lika många gånger som geometriska multipliciteten.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $(3-\lambda)^2 = 0$, $\lambda_1 = 3$, $E_{\lambda_1} = \operatorname{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, alg.mult=2, geom.mult=1

I vårt inledande exempel:

$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

Koll: $AP = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{Matlab}}{=} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 \\ 2 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} = [2v_1, 2v_2, 9v_3]$

$PD = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 \\ 2 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

Matlab: $[P, D] = \mathrm{eig}(A)$ ger inte riktigt samma. Varför?

__Tillämpning__: linjärt system av ODE.

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), & t > 0 \\ X(0) = b \end{cases}$$

Antag: $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ __diagonaliserbar__

$A = PDP^{-1}$

Byt koordinater:

$$x = Py$$

gamla koord. (i standardbasen) — nya koord. i egenvektorbasen.

$$y = P^{-1}x$$

Vi får: $y'(t) = (P^{-1}x(t))' = P^{-1}x'(t) =$

$$= P^{-1}Ax(t) = \underbrace{P^{-1}AP}_{=D}\,\underbrace{P^{-1}x(t)}_{=y(t)} = Dy(t)$$

Alltså: $y' = Dy$ <u>diagonalt</u> <u>system</u>

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

Obs: $x' = Ax$ är <u>kopplat</u> <u>system</u>

$$\Rightarrow \quad y_k'(t) = \lambda_k y_k(t) \quad \Rightarrow \quad y_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}$$

Transformera tillbaka:

$$(*) \quad x(t) = Py(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} v_k$$

Bestäm c_k genom att sätta in $x(0) = b$.

$$b = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$$

$$b = Pc$$

$$c = P^{-1}b$$

dvs c är b:s koord. i egenvektorbasen.

Enkelt om man använder egenvektorbasen! Kopplar isär ekvationerna. Kräver att A är diagonaliserbar.

Detta är viktigt ur teoretisk synvinkel: formel $(*)$ ger förståelse, se F15. Verklig beräkning görs <u>numeriskt</u> (se lp 2).