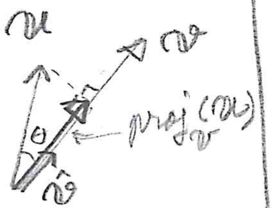
Idag: Ortogonalitet 6.1–6.2

Vi har redan använt skalärprodukt, längd, projektion för vektorer i rummet.

$$u \cdot v = |u|\,|v| \cos\theta$$

$$\operatorname{proj}_v(u) = (u \cdot \hat{v})\,\hat{v} = \frac{u \cdot v}{v \cdot v}\, v$$

$$|v|^2 = v \cdot v$$



Vi ska nu göra samma för vektorer i $\mathbb{R}^n$ och allmänna rum, t.ex. funktionsrum.

Skalärprodukt $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u \cdot v = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = [u_1 \dots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Läs Sats 1 i 6.1! (De vanliga egenskaperna.)

Längd (norm)

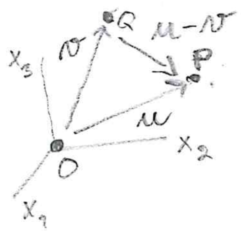
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}, \quad \|u\|^2 = u \cdot u$$

Obs: $\|cu\| = |c|\,\|u\|$ (om $c \in \mathbb{R}$)

Normera: $\hat{u} = \dfrac{u}{\|u\|}$ (om $u \neq 0$)

Avstånd: $\operatorname{dist}(u, v) = \|u - v\|$

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$



dvs avstånd mellan vektorer u, v resp. punkter P, Q.

Ortogonala vektorer

Vi säger att

$u \perp v$ (ortogonal) om $u \cdot v = 0$.

Obs: 0 är ortogonal mot alla vektorer.

Sats 2 (Pythogoras sats)

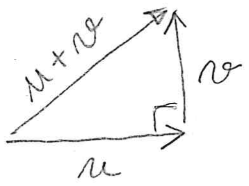
$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Bevis $\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) =$

$$= u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v =$$

$$= \|u\|^2 + 2\, u\cdot v + \|v\|^2.$$

Vi ser att $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ omm $u\cdot v = 0$.



(Vi ritar i planet men tänker i $\mathbb{R}^n$!)

Ortogonalt komplement

Låt W vara underrum till $\mathbb{R}^n$. $z \in \mathbb{R}^n$ är ortogonal mot W, $z \perp W$, om $z\cdot w = 0$ $\forall w \in W$. Mängden

$$W^\perp = \{ z \in \mathbb{R}^n : z\cdot w = 0 \ \forall w \in W \}$$

kallas ortogonala komplementet till W. (Uttalas "W-ortogonal".)

Obs: 1. $W^\perp$ är ett underrum till $\mathbb{R}^n$.

$$(\alpha z + \beta v)\cdot w = \alpha \underbrace{z\cdot w}_{=0} + \beta \underbrace{v\cdot w}_{=0} = 0$$

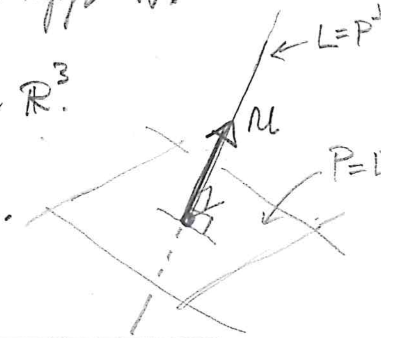
2. Räcker att kolla att z ortogonal mot en mängd som spänner upp W.

Ex Linje genom origo i $\mathbb{R}^3$.

$L = \mathrm{span}\{u\}$

$L^\perp = P$ plan genom 0 med normal u.

$P^\perp = L$



Hoppa över Sats 3.

6.2 <u>Ortogonal mängd</u> är en mängd

$S = \{u_1, \dots, u_p\}$, där vektorerna

är ortogonala, dvs $u_i \cdot u_j = 0$ om $i \neq j$.

<u>Ex</u> $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$u_1 \cdot u_2 = 3(-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$

$u_1 \cdot u_3 = \quad \dots \quad = 0$

$u_2 \cdot u_3 = \quad \dots \quad = 0$

Eller i Matlab:

$U = [u_1, u_2, u_3]$

$U^T U = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}$

$S = \{u_1, u_2, u_3\}$ är en ortogonal mängd.

<u>Sats 4</u> Om $S = \{u_1, \dots, u_p\}$ där alla $u_i \neq 0$ är en ortogonal mängd så är den linjärt oberoende, dvs en bas för $W = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_p\}$.

<u>Bevis</u> Antag $0 = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p$. Visa att alla $c_i = 0$.

Mult. med u_i:

$$0 \cdot u_i = c_1 \underbrace{u_1 \cdot u_i}_{=0} + \dots + c_i \underbrace{u_i \cdot u_i}_{\neq 0} + \dots + c_p \underbrace{u_p \cdot u_i}_{=0}$$

$\Rightarrow 0 = c_i\, u_i \cdot u_i$ ty $u_j \cdot u_i = 0$, $i \neq j$

$\Rightarrow c_i = 0$ ty $u_i \cdot u_i = \|u_i\|^2 \neq 0$. $\square$

En <u>ortogonal bas</u> är en bas som också är en ortogonal mängd.

<u>Ex</u> Standardbasen $E = \{e_1, \dots, e_n\}$

där $e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{rad } j$ är ortogonal bas.

Följande sats visar att ortogonalbaser är <u>mycket enklare</u> att använda. Viktigt!

Sats 5 Låt $\{u_1, \dots, u_p\}$ vara en ortogonalbas för underrummet W. Låt $y \in W$, dvs

$$y = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p .$$

Då ges koefficienterna av

$$c_i = \frac{y \cdot u_i}{u_i \cdot u_i} .$$

Bevis Som i förra beviset:

$$y \cdot u_i = c_1 \underbrace{u_1 \cdot u_i}_{=0} + \dots + c_i \underbrace{u_i \cdot u_i}_{\neq 0} + \dots + c_p \underbrace{u_p \cdot u_i}_{=0}$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{y \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}$$

$\square$

Ex Samma som förut. $\{u_1, u_2, u_3\}$ är ortogonal mängd, därför en bas för $\mathbb{R}^3$ enligt Sats 4.

Uttryck $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ i denna bas.

Matlab:

$u_1 \cdot u_1 = 11$, $u_2 \cdot u_2 = 6$, $u_3 \cdot u_3 = 66$

$y \cdot u_1 = 11$, $y \cdot u_2 = -12$, $y \cdot u_3 = -66$

Bara 6 tal att beräkna

Sats 5 ger: $y = \frac{11}{11} u_1 + \frac{-12}{6} u_2 + \frac{-66}{66} u_3$

$$= u_1 - 2u_2 - u_3$$

Eller med transformationsmatrisen

$$U = [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$y = Uc$, $c = U^{-1} y$ Inversen mycket svårare att beräkna.

```
>> c = inv(U)*y
eller c = A\y
```

Ortonormal mängd

$\{u_1, \ldots, u_p\}$ kallas ortonormal om den är ortogonal och normerad. Dvs

$$u_i \bullet u_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

Obs: $u_i \bullet u_i = \|u_i\|^2 = 1$, normerad.

Obs: En ortonormal mängd är en bas för $W = \text{span}\{u_1, \ldots, u_p\}$. Kallas ortonormerad bas eller ON-bas. Även ortonormal bas.

Ex Samma som förut. Vi normerar:

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} u_1$$
$$\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} u_2$$
$$\hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{66}} u_3$$

Jobbigt att räkna för hand! Matlab!

Då fås $U = [\hat{u}_1 \ \hat{u}_2 \ \hat{u}_3]$ med ortonormerade kolonner.

Matlab: $U^T U = I$ (>>U'*U)

Detta är Sats 6.

Sats 6 $U = [u_1, \ldots, u_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ har ortonormala kolonner omm

$$U^T U = I \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Bevis

skalärprod av u_i och u_j

$$(U^T U)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u^T_{ik} u_{kj} = u_i^T u_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = (I)_{ij} \ (p \times p)$$

Hoppa över Sats 7.

Ex Samma ex. $y = Uc \Rightarrow U^T y = \underbrace{U^T U}_{= I} c$

$\Rightarrow c = U^T y$ dvs koordinatbyte är enkelt om ON-bas, ingen invers behövs