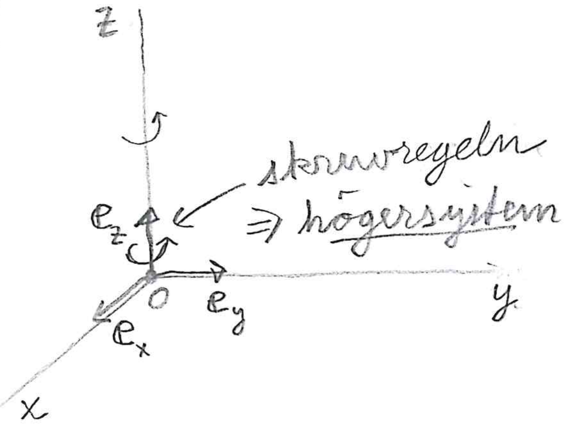
Idag: 1.4 Koordinatsystem
1.5 Kryssprodukt

Vi har: • linjär kombination $w = su + tv$
• skalärprodukt $u \cdot v = |u||v|\cos(\theta)$

Koordinatsystem

origo O
enhetsvektorer
e_x, e_y, e_z
ortogonala
⇒ Cartesiskt koordinatsystem



(till skillnad från snedvinkligt system)

Cartesiskt högersystem: ortonormerade basvektorer:

$e_x \cdot e_y = e_x \cdot e_z = e_y \cdot e_z = 0$ (ortogonala)

$e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = e_z \cdot e_z = 1$ (normerade)

Sats 1.4 Uppdelning i komposanter

$$u = u_x e_x + u_y e_y + u_z e_z \quad (*)$$

där skalärerna u_x, u_y, u_z är unika.

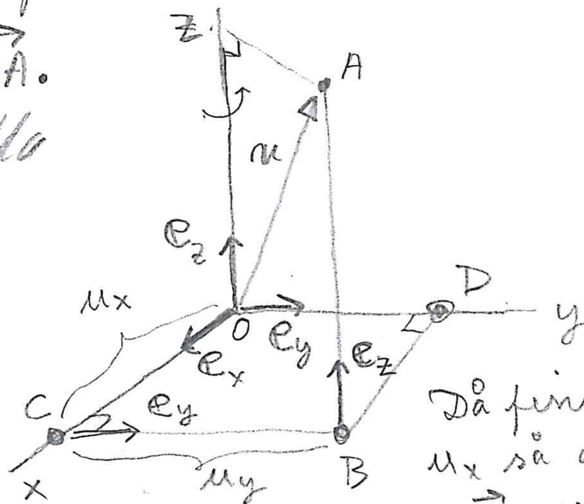
Vektorerna $u_x e_x$, $u_y e_y$, $u_z e_z$ är komposanter.

Talen u_x, u_y, u_z är komponenter.

Bevis (1) Det finns sådana tal.

Skriv $u = \vec{OA}$.

Axelparallella linjer ger B, C, D.



Då finns u_x så att $\vec{OC} = u_x e_x$ osv.

$$u = \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CB} + \vec{BA}$$
$$= u_x e_x + u_y e_y + u_z e_z$$

(2) Talen är unika. Antag (*). Mult. med e_x:

$$u \cdot e_x = u_x \underbrace{e_x \cdot e_x}_{=1} + u_y \underbrace{e_y \cdot e_x}_{=0} + u_z \underbrace{e_z \cdot e_x}_{=0} = u_x$$

Alltså: $u_x = u \cdot e_x = \text{sproj}_{e_x}(u)$

På liknande sätt: $u_y = \text{sproj}_{e_y}(u)$

$u_z = \text{sproj}_{e_z}(u)$

Talen är entydigt bestämda.

Vi skriver nu kortfattat:

$$u = (u_x, u_y, u_z)$$

istället för (*). Obs: $(u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3$.

<u>Sats 1,5</u> Komponentvis räkning.

(1) $u + v = (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z) =$

$= (u_x + v_x,\ u_y + v_y,\ u_z + v_z)$

(2) $tu = t(u_x, u_y, u_z) = (tu_x, tu_y, tu_z)$

(3) $u \cdot v = (\ ,\ ,\ ) \cdot (\ ,\ ,\ ) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

(4) $|u| = |(u_x, u_y, u_z)| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Bevis enkelt.

<u>Exempel 1.6</u> $u = (1,2,3)$, $v = (-4,5,6)$

$|u| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$|v| = \sqrt{16+25+36} = \sqrt{77}$

$u \cdot v = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 24$

$u \cdot v = |u|\,|v| \cos(\theta)$

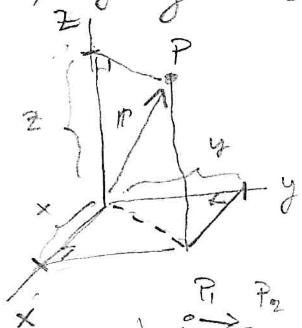
$\cos(\theta) = \dfrac{u \cdot v}{|u|\,|v|} = \dfrac{24}{\sqrt{14 \cdot 77}}$, $\theta = \text{acos}\left(\dfrac{24}{\sqrt{14 \cdot 77}}\right)$

$\hat{u} = \dfrac{(1,2,3)}{\sqrt{14}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$

$\text{proj}_u(v) = (v \cdot \hat{u})\,\hat{u} = \dfrac{u \cdot v}{|u|^2}\, u = \dfrac{24}{14}(1,2,3) =$

$= \left(\dfrac{12}{7}, \dfrac{24}{7}, \dfrac{36}{7}\right)$

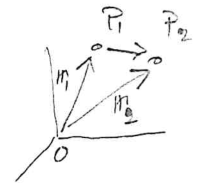
<u>Ortsvektor</u> för P: $r = \overrightarrow{OP} = x e_x + y e_y + z e_z$



<u>Koordinater</u> $P = (x, y, z)$

$r = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$

Koordinater för P är samma som komponenter för $r = \overrightarrow{OP}$.



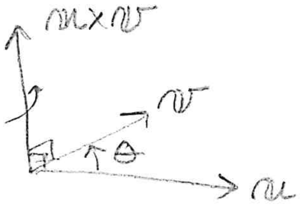
<u>Ex 1.7</u> $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP_2} = -\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$

Def 1.7 Kryssprodukt

Vektorn $u \times v$ bestäms entydigt av

- $|u \times v| = |u|\,|v| \sin(\theta)$
- $u \times v$ är ortogonal mot både u och v och riktad enligt skruvregeln.



Obs: $\sin(\theta) \geq 0$ då $0 \leq \theta \leq \pi$.

Sats 1.6 (regler)
(1) $v \times u = -u \times v$
(2) $u \times u = 0$
(3) $(tu) \times v = t(u \times v) = u \times (tv)$
(4) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$

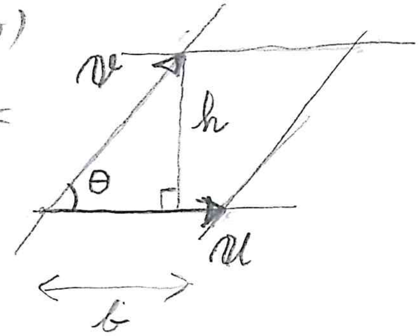
Men: $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$, se problem 1.11

Bevis (1), (2), (3) lätt. (4) svårare, utelämnas.

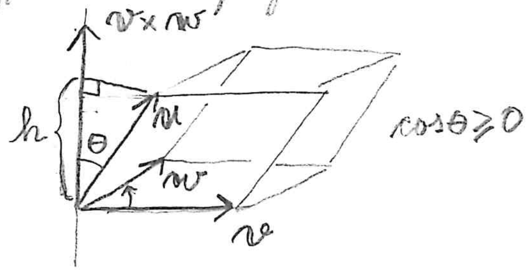
Exempel Area av parallellogram

$b = |u|$, $h = |v| \sin(\theta)$

$A = bh = |u|\,|v| \sin(\theta) = |u \times v|$



Exempel Volym av parallellepiped

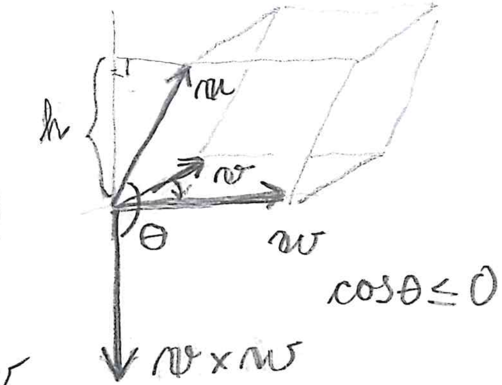


$V = hA$

$A = |v \times w|$

$h = \begin{cases} |u| \cos(\theta) & \text{spetsig} \\ -|u| \cos(\theta) & \text{trubbig} \end{cases}$

$h = |u|\,|\cos(\theta)|$



$V = |u|\,|\cos(\theta)|\,|v \times w|$
$= |u \cdot (v \times w)|$

V = absolutbeloppet av den skalära trippelprodukten $u \cdot (v \times w)$

Sats 1.7 Komposantuppdelning av kryssprodukten

$$u \times v = (u_y v_z - u_z v_y)e_x + (u_z v_x - u_x v_z)e_y + (u_x v_y - u_y v_x)e_z$$

Bevis: utveckla produkten

$$u \times v = (u_x e_x + u_y e_y + u_z e_z) \times (v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z)$$

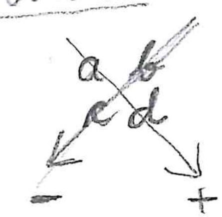
och använd

$$e_x \times e_x = 0,\quad e_x \times e_y = e_z,\quad e_y \times e_x = -e_z$$

$$e_x \times e_z = -e_y,\quad e_z \times e_x = e_y \quad \text{osv}$$

Räkneschema: determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



determinantstreck

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\underbrace{\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}_{\text{underdeterminant}} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Alternerande tecken,

stryk rad och kolonn

$$\begin{matrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{matrix}$$

Kryssprodukten som determinant.

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} e_x - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} e_y + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} e_z =$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y)e_x - (u_x v_z - u_z v_x)e_y + (u_x v_y - u_y v_x)e_z$$

samma som Sats 1.7